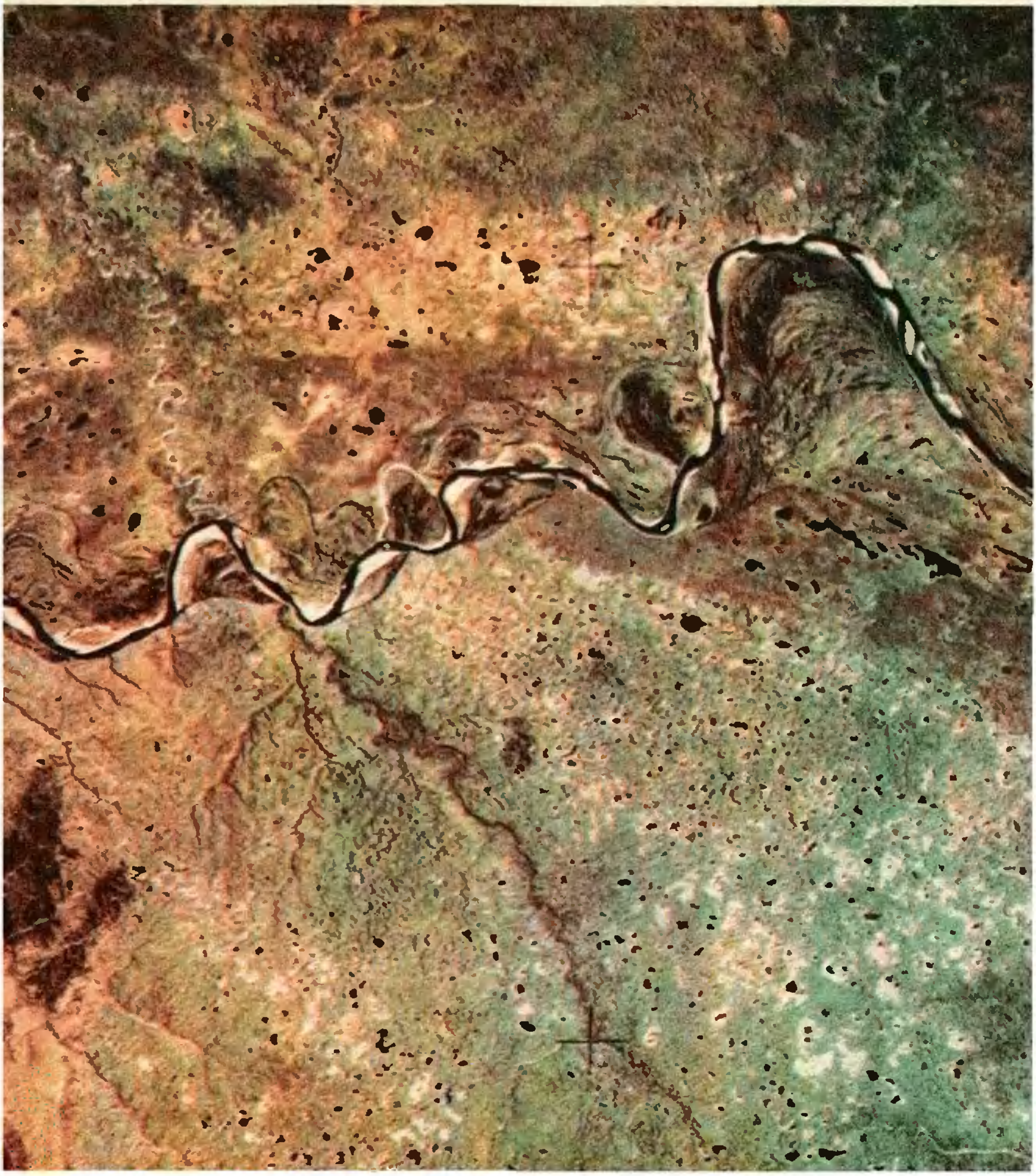
kvant.mccme.ru

ISSN 0130-2221

Квант

1
1983

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



kvant.mccme.ru

Эта конструкция из тонких проводов и стилизованных палочек, названная ее создателем Э. Хандюковым «стержне-вантовым многогранником», демонстрировалась в прошлом году в Москве на выставке «Архитектурная бионика, новые формы и конструкции». Воздушность и изящество ее линий сочетаются со сложностью геометрического замысла. Для любителей математики «стержне-вантовый многогранник» Э. Хандюкова — источник интересных вопросов. Хочется разобраться в его геометрии, выяснить, в какой мере он является переплетением правильных многогранников, как кажется на первый взгляд. Хотелось бы также понять математические основы подобных конструкций, понять, почему нитки и палочки без единого жесткого соединения могут образовывать жесткую конфигурацию.

Фотография, которую мы воспроизвели на первой странице обложки, сделана из космоса с помощью специальной аппаратуры.

Обратите внимание на извилистое русло реки. На участке, видном на фотографии, река протекает по низменности. Чем объясняется тот факт, что реки, текущие даже по гладкой равнине, извиваются, и на изгибах один берег, как правило, пологий, а другой — крутой?

Об этом вы узнаете, прочитав статью «Меандры рек».

kvant.mccme.ru

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант

1 1983

Основан в 1970 году

Издательство „Наука" Главная редакция Физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1983

kvant.mccme.ru

К читателям

Дорогие читатели! Перед вами научно-популярный физико-математический журнал для школьников. Ежемесячно он будет приносить в ваш дом порцию новых знаний.

Много интересного и полезного узнаете, вы читая наш журнал. Здесь будут статьи об открытиях и нерешенных проблемах, об удивительных достижениях науки и ее практических применениях. Мы расскажем вам, как фундаментальные законы природы проявляются в простых и очевидных явлениях, в вещах обыденных и повседневных.

В «Кванте» несколько разделов. В начале журнала публикуются статьи крупных ученых по различным проблемам физико-математических наук. Раздел «Новости науки» содержит небольшие заметки о новейших достижениях науки и ее приложениях. В Лаборатории «Кванта» описываются опыты, которые можно выполнить самостоятельно. Этот раздел должен помочь читателю развить наблюдательность, научиться изготовлять простые приборы, экспериментировать. В «Математическом кружке» публикуются циклы задач, объединенных единой темой или общими методами решения. Материалы этого раздела могут быть полезны как для самообразования, так и для работы школьного кружка.

В разделе Школа в «Кванте» помещаются статьи, связанные со школьной программой, разъясняющие и углубляющие наиболее трудные для понимания вопросы школьного курса. Если вы хотите получать задания для регулярных занятий по школьной программе, мы рекомендуем вам обратиться в одну из заочных школ, информацию о которых регулярно помещает наш журнал. Тот, кто собирается поступать в вуз, много полезного найдет в разделе «Практикум абитуриента», где публикуются варианты письменных экзаменов и задачи, предлагавшиеся на устных вступительных экзаменах. Раздел «Искусство программирования» предназначен для тех, кто интересуется современными ЭВМ и хочет научиться на них работать. Под рубрикой «Квант» для младших школьников» публикуются занимательные задачи и статьи, которые, как правило, оказываются интересными и для старшеклассников. Раздел «Информация» содержит материалы о внеклассной работе школьников: олимпиадах, летних естественнонаучных школах, научных обществах учащихся, физико-математических праздниках и т. д.

Особое место в журнале занимает «Задачник «Кванта». В нем предлагаются задачи, решение которых требует умения мыслить самостоятельно, творчески. Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги этого конкурса подводятся в декабре. Победители — школьники, приславшие наиболее интересные и полные решения, — получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников наравне с победителями областных олимпиад.

Желаем вам, дорогие читатели, удачи на трудном и прекрасном пути познания!

kvant.mccme.ru

Математика и производство

Академик АН УССР
Б. В. ГНЕДЕНКО

Назначение каждой науки состоит в поиске истины, разработке методов исследования, а также в использовании полученных знаний для решения задач практики. Это относится ко всем наукам, в том числе и к математике. Во все времена математика с честью выполняла обязанности верного помощника практики в самых разнообразных ее проявлениях. Первоначально круг применений математики был довольно ограничен — использование арифметики при взаимных расчетах, использование геометрии при определении расстояний, вычислении объемов и площадей. Еще в древнем мире математика стала использоваться для исследования астрономических явлений — движения светил, затмений Луны и Солнца. Позднее, когда человечество решилось выйти в открытое море, появились интересные и сложные проблемы ориентации в пространстве без видимых земных ориентиров. Возникли новые задачи прикладной математики, которые служили предметом исследований выдающихся математиков XVIII и XIX столетий.

Существенно новый период развития применений математики начался в связи с созданием элементов математического анализа в XVII веке. Конечно, влияние практики на появление новых понятий математики, связанных с *движением*, приведших к созданию дифференциального и интегрального исчислений, а позднее и теории дифференциальных уравнений, совершенно исключительно. А именно: изучение движения было

kvant.mccme.ru

вызвано, с одной стороны, развитием *мореплавания*, а с другой — появлением *артиллерии* и необходимостью изучения траектории снаряда. Недаром Ф. Энгельс писал, что «лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы, движение».

На базе математического анализа в XVIII веке были созданы основы теоретической (или, как тогда говорили, аналитический) механики. Движение системы материальных точек и твердого тела было описано системой дифференциальных уравнений. Эти уравнения позволяли, зная силы, действующие на отдельные детали машин, определять, как они будут двигаться. Теоретическая механика стала тем математическим аппаратом, который позволял рассчитывать работу машин еще до того, как они были выполнены в металле.

В современном производстве математические методы исключительно широко используются. Прежде всего, до ее производства, всякая техническая система — машина, прибор, аппарат и т. д.— должна быть *спроектирована*; нужно рассчитать состояние ее узлов при механических, тепловых, электрических и иных воздействиях. Это — большая и кропотливая работа, часто далеко не трафаретного характера. Далее, эти узлы необходимо рассчитать на *надежность в работе*, поскольку недостаточно надежное оборудование будет за себя мстить в процессе эксплуатации. Сейчас достаточно далеко продвинуто развитие теории надежности, и математические методы в ней занимают серьезное место.

Конструкция создана и проверена, но ее, как правило, следует изготовить в большом числе экземпляров. Для этого следует организовать производство так, чтобы все узлы и детали производились в нужном количестве и надлежащего *качества*. Кроме того, от производства требуется так организовать технологический процесс, чтобы узлы не нуждались в непроизводительной перевозке или переноске. Следует так рассчитать расположение цехов, а в цехах станков, чтобы избежать излишней транспортировки.

Мы приступили к производственному процессу. Нам следует организовать его так, чтобы в процессе изготовления своевременно замечать появление изделия недостаточно высокого качества (не говоря уже о браке). Иными словами, мы должны научиться *управлять качеством в процессе производства*. Это очень большая и важная задача, особенно теперь, когда предприятия изготовляют свою продукцию в десятках тысяч и даже миллионов экземплярах.

Изготовление недостаточно качественной (а значит, и недостаточно надежной) продукции оборачивается для общества огромными потерями на частые ремонты, на снижение производительности оборудования, на необходимость изготовления большого числа запасных частей и на привлечение рабочей силы не на изготовление новых изделий, а на ремонт испортившихся изготовленных. Подсчет потерь от снижения качества также требует математических расчетов, зачастую не сводящихся к чисто арифметическим. Для этого приходится создавать математические модели, собирать и обрабатывать данные эксплуатации, оценивать целесообразность повышения качества тех или иных узлов

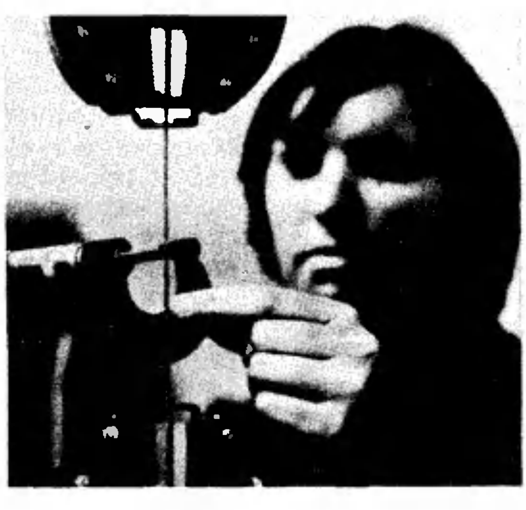
kvant.mccme.ru

Смена одного типа изделий на другой также требует математических средств, поскольку необходимо сравнить надежность новых изделий с надежностью ранее выпускавшихся, экономичность в изготовлении и эксплуатации, а также экономию в материалах. Нередко новые конструкции, особенно на первых порах, оказываются более дорогими. Однако если их качество выше, а надежность превышает надежность старых изделий, то выпуск такой продукции оправдан. Тем более, что когда технологический процесс устанавливается и налаживается, то и стоимость, как правило, снижается.

В последние годы в связи с увеличением выпуска продукции, усложнением технологических процессов и усложнением самой продукции выявилась необходимость рационального управления производственным процессом. Управление многих производств «вручную» оказывается невозможным. Так, при протяжке стальной проволоки, она перемещается со скоростью экспресса. Подметить с помощью глаза наметившиеся дефекты протяжки попросту невозможно. Физиологические возможности оператора или контролера оказываются для этого недостаточными. Что же делать? Решение найдено в *составлении математических моделей производственного процесса*, в которые включены подмодели, учитывающие то или иное изменение условий производства (перепады температур, наличие вибраций, повышенной влажности и т. д.). Без математической модели процесса передать управление автоматическому устройству невозможно, поскольку автомат не понимает указаний качественного характера — делай лучше, обрабатывай точнее, привели температуру нагрева в соответствие с необходимостью. Для того чтобы автомат хорошо управлял, он должен в надлежащие моменты получать информацию от специальных датчиков о состоянии параметров производственного процесса и в соответствии с моделью выбирать необходимое управление.

Поскольку все *задачи управления* имеют много общего, нет нужды для

каждой задачи разрабатывать особую теорию. Конечно, может случиться, что для частных задач управления можно найти более простое решение, но это не снимает вопроса построения общей теории. Такая теория была предложена в нашей стране академиком Л. С. Понтрягиным, а в США — Р. Беллманом. Теория Понтрягина получила название оптимального управления, а Беллмана — динамического программирования.



kvant.mccme.ru

Исходя из *задачи разладки оборудования,* А. Н. Колмогоров и его ученик А. Н. Ширяев начали разработку теории управления случайными процессами, превратившуюся в настоящее время в одно из центральных направлений развития теории вероятностей. Задача ставится так: в результате поступающих на оборудование воздействий производственный процесс постепенно отходит от нормального уровня. Это уклонение может достигнуть такого уровня, что дальнейшее производство становится нецелесообразным, поскольку разладка оборудования стала слишком большой. Разрабатываются методы, которые позволили бы своевременно заметить момент, когда разладка еще не наступила, но появилась опасность, что она может вскоре наступить. Этой задаче можно придать множество иных прикладных формулировок. В частности, с этой задачей и теорией Колмогорова непосредственно связаны вопросы управления качеством промышленной продукции.

Продукция уже изготовлена. Как оценить ее качество в целом? При ручном производстве этот вопрос не возникал, поскольку каждое изделие обладало своим особым качеством и оно проверялось. Теперь же на станке-автомате за короткие сроки выпускаются многие сотни изделий. Зачастую проверка отнимает несравненно больше времени, чем изготовление. Производству нецелесообразно умножать количество контролеров, которые ничего не производят и заняты лишь проверкой изготовленных изделий. Для некоторых типов изделий проверка качества каждого изготовленного изделия привела бы к такой картине: на каждого производящего рабочего нужно иметь 10—15 контролеров, и все-таки нет полной уверенности в точности оценки качества произведенной партии. Но этого еще мало. Существуют такие типы производства (скажем, фотопленки, спички), в которых нельзя проверять качество каждого изготовленного изделия, поскольку проверка приводит изделие в непригодное для дальнейшего использования состояние. Наконец, не сплошную проверку изготовленных изделий необходимо затратить большие средства и иметь огромные стенды для испытаний.

Необходим другой достаточно надежный способ оценки качества, который не обладал бы указанными недостатками. Такой метод предложен, он получил наименование *статистического приемочного контроля.* Он основан на законах теории вероятностей и в настоящее время широко используется в промышленности.

Мы отметим еще один совершенно особый и современный вид продукции, при изготовлении которой математические методы играют особенно большую роль. Я имею в виду *электронные вычислительные и управляющие машины,* а также промышленные роботы. В своем докладе на XXVI съезде КПСС Леонид Ильич Брежнев сказал: «Поистине революционные возможности открывают создание и внедрение миниатюрных электронных управляющих машин, промышленных роботов. Они должны получить самое широкое применение». Они уже изготовляются в десятках тысяч экземпляров и впоследствии, когда *микропроцессоры* будут еще дешевле, чем теперь, потребность в них будет составлять ежегодно миллионы штук.

Выяснилось, что математические методы для изготовления ЭВМ нужны во всех тех аспектах, которые уже были отмечены. Кроме того, следует обратить внимание на еще два очень существенных момента. Во-первых, само проектирование ЭВМ не может быть осуществлено без математика, поскольку никто иной не может сказать, какие операции и как часто приходится осуществлять при решении вычислительных и логических задач. В этом производстве роль математика особенно велика на всех этапах — от проектирования, изготовления, испытания до установки и использования. Во-вторых, если раньше основные средства при приобретении ЭВМ затрачивались на само это изделие, то теперь стоимость собственно машины составляет не более 40%. Основную цену

(Окончание см. на с. 11)

kvant.mccme.ru

Он прожил счастливую жизнь

(к 80-летию со дня рождения И. В. Курчатова)

Академик
И. К. КИКОИН

В истории физики известны имена выдающихся ученых, которые своими трудами более или менее значительно опередили свой век. Так, например, Ломоносов почти на столетие раньше «срока» сформулировал идею молекулярно-кинетической теории. То же можно сказать и о Циолковском, который примерно на полстолетия опередил эру ракетной техники. Заслуженное признание и слава этих ученых пришли для них слишком поздно. Современные этим ученым наука и техника не были подготовлены для восприятия их идей. И это обстоятельство в некотором смысле было бедой для таких, безусловно великих, ученых: они не были признаны современниками. Истинно счастлив ученый, который идет «в ногу» со временем.

Академик Игорь Васильевич Курчатов был именно счастливым ученым. Он неизменно интуитивно чувствовал развитие современной ему физики. Он всегда занимался наиболее животрепещущими вопросами физики. Так, в середине 20-х годов электрические свойства диэлектриков были одной из актуальных проблем физики. Именно к этому времени относятся работы Курчатова в области электрической прочности диэлектрических кристаллов, которые затем привели его к замечательным исследованиям сегнетоэлектричества. Здесь Курчатову, можно сказать, вдвойне повезло. Его исследования явления сегнетоэлектричества совпали по времени с появлением квантовой теории ферромагнетизма, электрическим аналогом которого и является сегнетоэлектричество (его часто называют ферроэлектричеством). Таким образом, работы Курчатова сразу оказались в русле развития двух актуальных проблем современной ему физики твердого тела: физики диэлектриков и физики магнетизма.

С 30-х годов, как известно, началось бурное развитие ядерной физики, которое сопровождалось каскадом крупнейших открытий. Это — открытие нейтрона, позитрона, искусственной радиоактивности и т. д. Курчатов решительно переключает свою лабораторию на работы в этой многообещающей области физики.

В это время в Ленинградском физико-техническом институте (ЛФТИ), где работал Курчатов, практически не было «культуры» физики атомного ядра, кроме небольшой лаборатории Д. В. Скобельцына, который в основном занимался космическими лучами.

Курчатову с его группой приходилось все начинать практически на пустом месте. В это время Игорь Васильевич целыми днями просиживал в библиотеке и изучал литера-

kvant.mccme.ru

туру. «Литературный» период длился сравнительно недолго. Очень скоро в лаборатории Курчатова начались экспериментальные работы по ядерной физике. Довольно быстро определилось основное направление его интересов: искусственная радиоактивность при облучении нейтронами. Тогда можно было видеть типичную картину: Игорь Васильевич мчится из одного конца коридора в другой с облученным образцом в руке для исследования очередного короткоживущего ядра.

В те времена в стране не было еще ни одного действующего циклотрона и только в Радиевом институте заканчивалось строительство первого циклотрона с вертикально расположенными метровыми полюсами магнита. Этот циклотрон долго не могли наладить. Практически все руководство работами по налаживанию циклотрона взял на себя Игорь Васильевич, и довольно быстро циклотрон был запущен.

Работы в лаборатории Курчатова велись с максимальной интенсивностью. Для химической идентификации искусственных ядер он привлек своего брата Бориса Васильевича Курчатова, и очень скоро были налажены радиохимические исследования с индикаторными (то есть ничтожно малыми) количествами вещества. Словом, в течение полутора лет работы по ядерной физике в лаборатории Курчатова достигли, как принято говорить, мирового уровня.

Вскоре после начала работ вышла монография И. В. Курчатова под названием «Расщепление атомного ядра» (1935 г.).

Работы по ядерной физике непрерывно велись до самой войны. Правда, начиная с 1937 года я уже не мог за ними следить, потому что уехал в Свердловск и практически не встречался с Игорем Васильевичем. И только в конце 1942 года Курчатов неожиданно появился в Свердловске, зашел ко мне в лабораторию и поинтересовался, чем я занимаюсь. Внешне его посещение тогда ни на чем не сказалось, но позже стало ясно, что он имел поручение прозондировать возможность привлечь меня к новой тематике. Действительно, в начале 1943 года я был вызван в Москву, где встретился с И. В. Курчатовым и А. И. Алихановым у С. В. Кафтанова. Мне сообщили, что имеется поручение правительства заняться вопросами практического использования деления урана. Едва ли нужно упоминать, что после открытия деления урана это был самый животрепещущий вопрос, который интересовал всех физиков. На ядерной конференции 1940 года в Москве проблема деления урана обсуждалась весьма оживленно при активном участии Курчатова. По его инициативе была составлена записка правительству, в которой указывалось на важность этой проблемы и на необходимость организации широких исследований в этой области.

В начале 1943 года организация работ по практическому использованию явления деления урана была оформлена правительственным актом. Началась совместная деятельность с И. В. Курчатовым уже на новом поприще, в новой роли. Понятно, что более актуальной физической проблемы в то время нельзя было себе представить. Конечно, проблема защиты кораблей от магнитных мин, которой занимался тогда Игорь Васильевич, тоже была очень актуальна. Известно, что работы А. П. Александрова и И. В. Курчатова в этой области позволили спасти жизнь многим тысячам моряков. Но проблема урана не терпела никаких отлагательств. Так началась напряженнейшая эпопея решения практической задачи создания атомного оружия. Первое время непосредственно работами занималось считанное число людей. Вскоре Игорь Васильевич привлек крупных теоретиков (Я. Б. Зельдовича, И. Я. Померанчука и др.). Довольно быстро было произведено разделение «сфер влияния». Проблемы, не связанные непосредственно с ядерной физикой, были поручены мне: как выразился Курчатов, «ты у нас специалист по пузырькам» (он в шутку называл все работы, не связанные с ядром, пузырьковой физикой). Вопросами ядерной физики занимался он сам и А. И. Алиханов.

kvant.mccme.ru

Начался бурный организационный период, когда нужно было собирать людей, доставать помещения, оборудование. Временно нам было предоставлено помещение в Пыжевском переулке и в Институте неорганической химии на Калужской улице. И снова Игоря Васильевича можно было видеть бегущим с облученными мишенями из одного конца коридора в другой. Казалось, мы снова в ЛФТИ. Наряду с этой работой Курчатов выполнял огромную организаторскую работу. Засиживались мы на Пыжевском до поздней ночи.

Однажды было сказано, что нужно готовить доклады о программе работ с указанием конечных сроков практического решения проблемы. Мы засели за составление такого доклада — каждый по своей части. И в один из вечеров предстали перед правительством. Докладывали тоже каждый по своей части. В каждом докладе содержался пункт, указывающий сроки получения практических результатов. Как известно, эти сроки были выдержаны.

В это время Игорь Васильевич организовал работы не только по созданию института. Теоретики и экспериментаторы взаимно обучались основам будущей ядерной техники. Коллективно обсуждались основные проблемы, связанные с практической задачей, которая была поставлена. Все, особенно Курчатов, чувствовали огромную ответственность, возложенную на коллектив. Большое беспокойство вызывал вопрос, не обгонит ли нас фашистская Германия. Не было никакой уверенности, что Германия не занимается усиленно проблемой урана. Было ясно, что если в 1941 году все публикации, относящиеся к делению урана, вдруг прекратились, то все, в том числе и немцы, должны были понимать, что начались работы по использованию этого явления для важных целей. Нужно было принять во внимание и то, что в печати появился ряд статей с оценкой того действия, которое может вызвать цепная ядерная реакция, если она осуществится.

В лаборатории поначалу эксперименты осуществлялись в очень малом масштабе — не было места. Но теоретические и расчетно-оценочные работы велись с чрезвычайной интенсивностью. После наших докладов о перспективах решения проблемы процесс организации лаборатории резко ускорился. Довольно быстро было выделено новое помещение и приведено в порядок старое. К концу 1944 года мы уже имели достаточно приличные помещения для работы.

Научная и организационная деятельность Игоря Васильевича была предельно напряженной. Тогда он руководил работами по измерению основных ядерных констант урана. Необходимо было получить с большой точностью данные о количестве нейтронов, освобождающихся в одном акте деления ядра урана, определить энергетические спектры нейтронов и т. п.

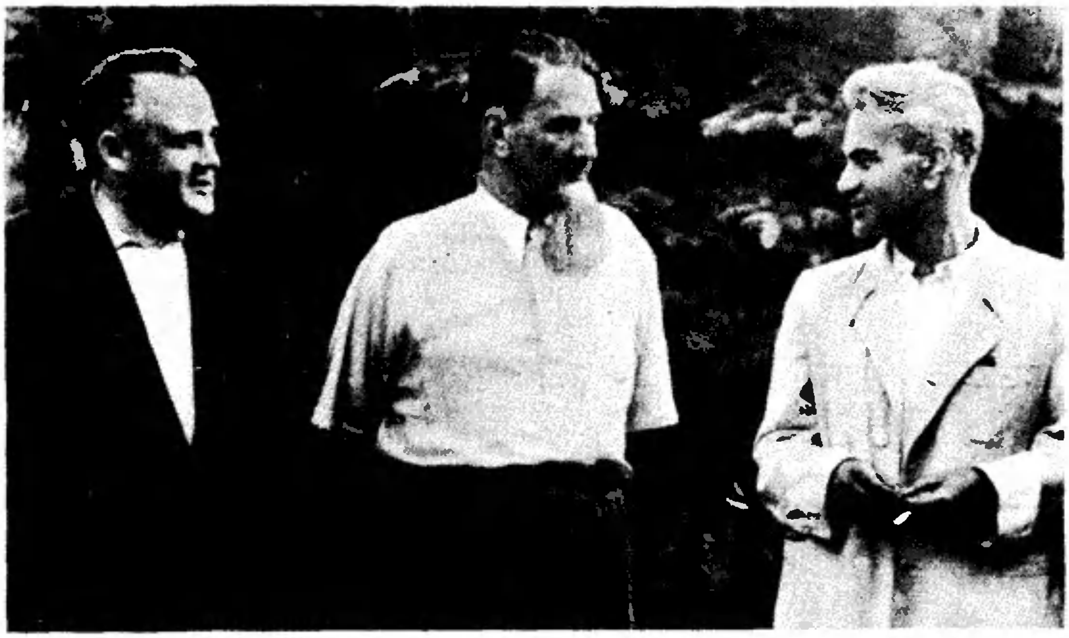
Курчатов «озадачивает» (одно из любимых его выражений) теоретиков: необходимо развить теорию цепных ядерных реакций. Как известно, наши теоретики с большим успехом справились с этой задачей. Курчатов непосредственно занялся строительством первого атомного реактора. Он целиком был захвачен этим делом и сам руководил проектными, конструкторскими и научными разработками. Он сумел привлечь к проблеме большое количество научных институтов и ученых самых разных специальностей. Его интересовал не только сам реактор. Он понимал, что предстоят большие химические исследования по выделению плутония*). Я помню, однажды, когда мы были в Кремле, Игорь Васильевич демонстрировал первую стеклянную ампулочку с несколькими микрограммами плутония, который был получен на нашем первом реакторе, находящемся в «здании» монтажных мастерских.

Вскоре Курчатов выехал на площадку, где началось сооружение промышленного реактора, и в Москве бывал наездом, как и другие руководители.

---

*) Плутоний — трансурановый элемент, занимающий 94-ю клетку периодической системы Менделеева. Пригоден для создания атомного оружия и мирного использования атомной энергии.

kvant.mccme.ru



С. П. Королев, И. В. Курчатов, М. В. Келдыш (Москва, 1959 год).

Наконец, наступил день, когда все было готово для испытания атомного оружия. Непосредственное руководство первым взрывом осуществлял Курчатов. И несмотря на то, что на месте испытания присутствовали ответственные члены правительства, было сказано, что руководство всеми работами поручается Курчатову. И все работы были подчинены лично ему. Доверие правительства Игорю Васильевичу было неограниченным.

Игорь Васильевич быстро понял, что актуальнейшая проблема послевоенного времени — мирное использование атома в энергетике. И поэтому не удивительно, что первая атомная электростанция была создана под его непосредственным руководством. Курчатов понимал также, что для дальнейшего развития атомной науки требуется обеспечить ее тылы, создать современные установки для изучения физики элементарных частиц. И по его инициативе, также весьма своевременно, началась организация Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ) под Москвой в Дубне. Можно сказать, что Дубна — это детище Курчатова, хотя физика элементарных частиц была далека от личных научных интересов ученого.

Едва ли нужно доказывать, насколько своевременно были начаты работы по управляемым термоядерным реакциям. Тогда еще не было известно, что в других странах тоже ведутся такие работы. Это было начало 1952 года. Курчатов внимательно следил за ходом работ, хотя первое время непосредственного участия в них не принимал. Не менее своевременно он оценил полученные при исследованиях результаты и понял, что первоначальные надежды на быстрое решение проблемы оказались слишком оптимистичными. Он понял, что необходима серьезная систематическая работа в этой области, и опять же своевременно оценил целесообразность рассекречивания этих работ. Как известно, в 1956 году он в своем докладе в Англии изложил наши результаты по управляемому термоядерному синтезу.

Помню, с какой тщательностью Курчатов готовил свой доклад: оттачивал каждую фразу, обсуждал, исправлял, переделывал. Доклад в Англии произвел сенсацию. Только после этого стало известно, что аналогичные работы велись и в США, и в Англии. С тех пор начался период широкого международного сотрудничества в достижении управ-

kvant.mccme.ru

ляемой термоядерной реакции. Личные интересы Курчатова также переместились в эту увлекательную область. В последние годы он сам руководил работами по термоядерному синтезу.

С самого начала организации Института атомной энергии (ИАЭ) Игоря Васильевича беспокоил вопрос, сумеем ли мы наладить работу так, как она была организована А. Ф. Иоффе в ЛФТИ, где в основе лежал беспредельный энтузиазм сотрудников. Все мы чувствовали себя ответственными перед Иоффе, авторитет которого был чрезвычайно высок. Это Курчатов понимал и хотел обеспечить такую же интенсивную работу у себя в институте. Он не раз высказывался в том духе, что нам придется надеяться не на личное обаяние руководителей, а на важность и грандиозность решаемой проблемы. В действительности его личный авторитет был велик. Что касается обаяния, то ему тоже было его не занимать. Он сам в этом не был убежден, но когда ему на это указывали, ухмылялся и говорил: «Посмотрим». Опыт показал, что и личное обаяние Курчатова, и его большой научный авторитет, наряду с грандиозностью проблемы, которая была поручена институту, действительно обеспечили высокую интенсивность и производительность научного труда. Сотрудники ИАЭ тоже работали, не считаясь со временем, не за страх, а за совесть.

Термоядерный синтез — это лебединая песня Курчатова. Последние дни он проводил непосредственно в лаборатории, за пультом, за рабочим столом, на термоядерных установках нашего института и был полон надежд, что в самое ближайшее время термоядерный синтез будет практически осуществлен.

Можно утверждать, что Курчатов прожил счастливую жизнь. Игорь Васильевич занимался самыми актуальными, самыми животрепещущими, самыми многообещающими вопросами науки. Он верил в беспредельную мощь науки и заразил этой верой своих сотрудников. На этом и сейчас зиждутся успехи атомной науки в нашей стране.

Математика и производство

(Начало см. на с. 3)

имеют *программы — математическое обеспечение,* без которого машина неработоспособна. Таким образом, сама математика превратилась теперь в производственный продукт!

Очень интересно отметить, как менялось представление о том, какие разделы математики имеют значение для производства. Первоначально лишь элементарные арифметика, геометрия и математический анализ использовались для этих целей. Но постепенно оказывалось, что новые вопросы требуют и новых математических средств исследования. Так, появление авиации ввело в число прикладных дисциплин теорию функций комплексного переменного. Управление производством и программирование для ЭВМ сделало математическую логику непосредственной производительной силой. Учет молекулярных и субмолекулярных явлений в электронных схемах нуждается в широком использовании методов и результатов теории вероятностей и теории случайных процессов. Оптимизация производства привела к созданию новых дисциплин (линейное и выпуклое программирование, оптимальное управление и др.). Вычислительные методы привели к широкому использованию алгебры, функционального анализа, теории вероятностей. В сущности вся математика, даже в самых абстрактных ее частях, оказалась необходимой для практики, в том числе и для организации производства.

Для применения математики не видно границ. По мере развития техники и производства будет расширяться и углубляться роль и место математических методов в практической жизни.

kvant.mccme.ru

Выдающийся физик-теоретик XX века

(к 75-летию со дня рождения Л. Д. Ландау)

Доктор физико-математических наук
М. И. КАГАНОВ

XX век — век революционных преобразований в теоретической физике — войдет в историю созданием релятивистской механики (теории относительности) и квантовой (волновой) механики. Он богат блестящими именами ученых — творцов новой физики. Одним из таких творцов был Лев Давидович Ландау. Он влиял на развитие теоретической физики и своими личными научными результатами, и созданием активно работающей школы физиков-теоретиков — «Школы Ландау» (он был поистине выдающимся учителем), и «Курсом теоретической физики», начатым в 1937 году и завершенным (Е. М. Лифшицем и Л. П. Питаевским) в 1979 году. Чем бы Л. Д. Ландау не занимался, в любой его деятельности ощущался особый, присущий ему стиль. В собственных его работах — ясная постановка задачи, математическое изящество, краткость решения; в «Курсе» — оптимальный путь от основ теории к решению конкретных задач; в его изложении сложные вопросы обычно превращаются в простые, иллюзорные трудности рассеиваются.

Невозможно в короткой статье сколько-нибудь полно охарактеризовать деятельность Л. Д. Ландау. Придется ограничиться короткими заметками, в большой мере основанными на личных воспоминаниях автора.

* * *

На книжной полке почти у любого физика — и преподавателя, и исследователя — стоят тома «Курса теоретической физики» Ландау и Лифшица. У счастливцев — все десять. И стоят не для украшения. При подготовке к лекции или в процессе непосредственной работы к ним приходится бесконечно обращаться. Имя Ландау вошло во многие научные термины: затухание Ландау и уровни Ландау, диамагнетизм Ландау и уравнения Ландау — Лифшица, критерий сверхтекучести Ландау, теория фазовых переходов второго рода Ландау, особенности Ландау, теория Ферми-жидкости Ландау и уравнение Гинзбурга — Ландау... А ведь Ландау не производил физических измерений, не работал с приборами в лаборатории, а только, как он сам говорил, «писал на бумаге формулы». Он был одним из великих физиков-теоретиков XX столетия.

Способности Ландау проявились очень рано. Он говорил, что не помнит себя не умеющим дифференцировать и интегрировать. Четырнадцати лет (в 1922 году) он поступил в Бакинский университет, где учился одновременно на двух фа-

kvant.mccme.ru

культетах — физико-математическом и химическом; семнадцати лет закончил физическое отделение Ленинградского университета, куда перевелся в 1924 году (химическое образование он не стал продолжать); восемнадцати лет опубликовал свою первую работу — теорию интенсивности в спектрах двухатомных молекул (одна под номером 1 входит в «Собрание трудов» Л. Д. Ландау). Потом — аспирантура в Ленинградском физико-техническом институте; в 1929—30 годах — полуторагодичная поездка за границу: в Данию, в Англию и в Швейцарию. «Наиболее важным для него было пребывание в Копенгагене, где в Институте теоретической физики у великого Нильса Бора собирались физики-теоретики со всей Европы и на руководимых Бором знаменитых семинарах обсуждались все основные вопросы теоретической физики того времени. Эта научная атмосфера, усиливаемая обаянием самой личности Бора, оказала решающее влияние на физическое мировоззрение Льва Давидовича, и в дальнейшем он всегда считал себя учеником Нильса Бора. Еще два раза он посетил Копенгаген: в 1933 и 1934 гг.»*)

Трижды Бор приезжал в Советский Союз. Встречи и долгие беседы с Ландау входили в обязательную программу пребывания Бора в нашей стране. Последний раз Бор и Ландау встречались в 1961 году в Москве. Они приняли участие в традиционном празднике физиков Московского университета «Дне Архимеда».

В 1932 году Ландау переезжает в Харьков. Здесь он — двадцатичетырехлетний — возглавляет теоретический отдел нового Украинского физико-технического института и одновременно заведует кафедрой теоретической физики на физико-механическом факультете Харьковского механико-машиностроительного института, а с 1935 года заведует кафедрой общей физики в Харьковском университете. С весны 1937 года Ландау в Москве — заведует теоретическим отделом Института физических проблем, незадолго до этого созданного П. Л. Капицей. Здесь он оставался до конца жизни. Институт физических проблем и фигурально, и фактически многие годы был его родным домом. На одном из зданий института — мемориальная доска: «Здесь с 1937 года по 1968 год жил и работал крупнейший физик академик Лев Давидович Ландау». Окна сегодняшнего теоретического отдела института, между которыми помещена мемориальная доска, соседствуют с окнами его квартиры. Здесь написаны (совместно с Е. М. Лифшицем) основные книги «Курса теоретической физики». В Институте физических проблем в 1941 году построена теория сверхтекучести гелия — исключительно интересного явления, открытого в 1938 году П. Л. Капицей.

Однажды (в конце пятидесятых годов) я спросил у Льва Давидовича: «Какую свою работу Вы считаете лучшей?» Ответ: «Теорию сверхтекучести гелия. Ее до сих пор многие не понимают».

Научное творчество Л. Д. Ландау беспрецедентно на своей широте. Оно охватывает всю теоретическую физику от гидродинамики до квантовой теории поля. Наш век — век специализации. Нет ученых, одинаково хорошо разбирающихся во всей физике. Ландау, по-видимому, был последним физиком-энциклопедистом. Его учениками считают себя и теоретики, занимающиеся физикой твердого тела, и астрофизики, и специалисты по элементарным частицам. Их научные пути разошлись уже при жизни Ландау, но он — их Учитель — объединял всех. Все они каждый четверг в 11 часов утра собирались в Институте физических проблем на знаменитом Ландауском семинаре. Не только москвичи, но и харьковчане, ленинградцы, физики-теоретики из Киева, Тбилиси...

Семинар, которым руководил Ландау, войдет в историю теоретической физики. На его заседаниях создавалось, строилось то, что называют «школой Ландау». Здесь можно было выступить с работой из лю-

*) Из статьи Е. М. Лифшица, напечатанной в качестве приложения в Собрании трудов Л. Д. Ландау, т. II (М., «Наука», 1969).

kvant.mccme.ru

Институт физических проблем. Четверг. Семинар Ландау.

бой области теоретической физики. И не просто выступить, но и получить квалифицированный совет либо во время доклада, либо до — при предварительном обсуждении с Ландау. На семинаре царила полная демократичность. Лев Давидович сидел спиной к аудитории, в первом ряду, и хотя докладчик, как правило, обращался непосредственно к нему, он не был Председателем, Куратором — никакой торжественности, важности (в день пятидесятилетия Ландау А. И. Шальников назвал его «самым **не важным** человеком», какого он знал). Каждый мог прервать докладчика, требуя разъяснения или высказывая свое неодобрение. Этой возможностью пользовался и Ландау. Докладывать в такой обстановке, естественно, было трудно. Если выяснялась несостоятельность работы или докладчик не мог объяснить существа дела, он безжалостно лишался слова. Но надо помнить: причиной такой «жесткости» было бескомпромиссное отношение Ландау к науке. Правильность или неправильность результата не зависит от того, получен он близким другом или совершенно посторонним. Ландау нередко защищал докладчика от нападок слушателей. Часто можно было услышать: «Послушаем дальше, автор обычно бывает прав».

* * *

Теоретическая физика исследует природу методами математики. Ландау придавал большое значение умению физика-теоретика владеть математической техникой. Степень владения должна быть такой, чтобы математические затруднения не отвлекали от физических трудностей задачи, а преодоление математических трудностей не становилось бы самоцелью. «Начинать надо с математики, которая, как Вы знаете, является основой нашей науки... Имейте в виду, что под знанием математики мы понимаем не всяческие теоремы, а умение реально на практике интегрировать, решать в квадратурах обыкновенные дифференциальные уравнения и т. д.» Или: «...теоретику в первую голову необходимо знание математики. При этом нужны

kvant.mccme.ru

не всякие теоремы существования, на которые так щедры математики, а математическая техника, то есть умение решать конкретные математические задачи... В качестве метода изучения могу только подчеркнуть, что необходимо самому произвести все вычисления, а не предоставлять их авторам читаемых Вами книг». Это — цитаты из писем Л. Д. Ландау молодым людям, увлеченным теоретической физикой и обратившимся к Ландау с просьбой помочь разобраться, как овладеть основами науки. Лев Давидович всегда отвечал на подобные письма, если чувствовал искреннее желание автора письма серьезно заниматься наукой. Письма Л. Д. содержат не только точные советы и указания молодым корреспондентам, но и простые слова поддержки, столь важные в начале пути, шутливые, но весьма нужные замечания: «Иностранные языки, увы, необходимы. Не забывайте, что для усвоения их, несомненно, не нужно особых способностей, поскольку английским языком неплохо владеют и очень тупые англичане...» «Бояться меня не стоит — я вовсе не кусаюсь»,*) и тут же — приглашение звонить «лучше всего от 9.30 до 10.30 утра, когда я почти всегда дома, но можно и в любое другое время... Я проэкзаменую Вас и дам Вам программу для дальнейшего обучения».

Лев Давидович часто говорил о стимулах научного творчества. Молодой научный работник не должен ставить себя целью открытие новых законов. «Только не старайтесь решать никаких проблем. Надо просто разобраться, а решение проблемы приходит само». Понимание физики явления, приходящее в процессе ежедневной, казалось бы рутинной работы, доставляет радость и удовлетворение, окупающие бесконечное напряжение, требующееся для решения действительно интересной задачи.

Бор и Ландау в МГУ на «Дне Архимеда» (1961 год).

Все, кто общался с Л. Д., поражались его неослабевающему с годами интересу к разнообразным задачам, которые ставит и решает физика. Он разговаривал о науке с сотнями физиков. Они рассказывали ему о самых различных работах, различных по трудности, по глубине, по значительности, работах, относящихся к самым разным объектам — к твердым телам и к элементарным частицам, к звездам и к газам. Любая работа представляла для него интерес, если удовлетворяла простому принципу: работа должна разъяснять что-то непонятное. Бесконечно разъясняющимся и бесконечно ставящим новые загадки — таким воспринимал мир Ландау. У него по существу с детства появилось ощущение красоты науки о природе. «Он рассказывал позднее, как в то время (ему было тогда 16 лет) он был потрясен невероятной красотой общей теории относительности... Он рассказывал также об экстазе, в ко-

*) Нелишнее замечание: о Ландау ходила слава резкого, ироничного, остроумного, в каком-то смысле безжалостного собеседника. Не стесняясь, он говорил все, что думает о работе. Неверная работа могла быть названа чушью, патологией. На его кабинете в Харьковском институте висела табличка «Л. Д. Ландау. Осторожно — кусается!» Беспощадность критики полностью искупалась научной беспристрастностью, искренней радостью, когда кто-то получал нетривиальный, интересный результат, желанием помочь преодолеть трудности.

kvant.mccme.ru

торый привело его изучение статей Гейзенберга и Шредингера, ознаменовавших рождение новой квантовой механики... Они дали ему не только наслаждение истинной научной красотой, но и острое ощущение силы человеческого гения, величайшим триумфом которого является то, что человек способен понять вещи, которые он уже не в силах вообразить»*). Эту мысль (человек способен понять то, что не в силах вообразить!) он пронес через всю жизнь.

Занятость реальными научными задачами делала Ландау совершенно нечувствительным к модным увлечениям читательской аудитории: к снежному человеку, телепатии, летающим тарелкам и т. п. Подобные увлечения он считал суеверием и остро высмеивал. Его раздражали болтовня и верхоглядство, которые, как правило, сопровождали попытки решения «таинственных» проблем. Однажды, прочитав популярную статью о навигационном устройстве птиц, я попытался поговорить на эту тему с Ландау. Он довольно равнодушно отнесся к моим словам, сказав, что прежде чем рассуждать о правильности или неправильности тех или других гипотез, надо познакомиться с проблемой по существу, а не из вторых рук. Вскоре из журнала «Природа» я узнал, что результаты опытов, которые обсуждал автор популярной книги, опровергнуты.

Не нужно думать, что Ландау был «научным сухарем», целиком погруженным в теоретическую физику. Круг интересов Льва Давидовича вне физики был очень широк. Он очень любил и хорошо знал историю, часто поражал знакомством с подробностями исторических событий; его интересовали все виды искусства (правда, за исключением музыки), он очень много читал, знал на память и хорошо декламировал массу стихов. Друзья поддразнивали Ландау, говоря, что у него инфантильный вкус. Он любил Драйзера больше Хемингуэя. Ему нравились бытовые драмы в театре. Но... Когда Лев Давидович услышал впервые одно из наиболее глубоких философских стихотворений Пастернака — его «Гамлета» («Гул затих. Я вышел на подмостки. Прислонясь к дверному косяку, я ловлю в далеком отголоске, что случится на моем веку...»), он не мог с ним расстаться. Тут же вытащил записную книжку и аккуратным бисерным почерком переписал «Гамлета».

* * *

Если бы не ранняя смерть (в 1962 году Лев Давидович попал в автомобильную катастрофу, в борьбе за его жизнь принимали участие физики буквально всего мира; после этого он прожил еще шесть лет, но к научной работе так и не смог вернуться), Ландау можно было бы считать счастливым человеком. Он получил признание при жизни. Его любили и бесконечно уважали ученики. Он пользовался всеобщей популярностью. Его публичные выступления проходили в переполненных аудиториях и всегда сопровождались успехом.

Академик, лауреат Ленинской премии, трижды лауреат Государственных премий, Герой Социалистического Труда — так отметила его деятельность наша страна. Не было недостатка и в почетных наградах из других стран. В 1951 году он был избран членом Датской, а в 1956 году — Нидерландской академий наук. В 1959 году он стал членом Британского физического общества, а в 1960 году — иностранным членом Британского Королевского общества. В том же году он был избран в Национальную академию наук США и Американскую академию наук и искусств. В 1960 году Ландау была присуждена премия Ф. Лондона (США) и медаль имени Макса Планка (ФРГ) и, наконец, в 1962 году «за пионерские исследования в теории конденсированного состояния материи, в особенности жидкого гелия» — Нобелевская премия по физике.

Сделанное Ландау имеет непреходящее значение и останется навсегда в науке.

*) Е. М. Лифшиц. Приложение в Собрании трудов Л. Д. Ландау.

kvant.mccme.ru

Меандры рек

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Видел ли кто-нибудь реку, текущую прямо, без изгибов? Какой-то участок реки, конечно, может быть прямым, но рек, текущих совсем без изгибов, не существует. Даже если река течет по равнине, она обычно «петляет», и часто изгибы рек повторяются с определенным периодом. А на изгибах один берег реки, как правило, крутой, а другой — пологий. Как объяснить эти особенности поведения рек?

Гидродинамика — раздел физики, изучающий движение жидкости,— в наше время очень развитая стройная наука. Но в применении к таким сложным естественным объектам, как реки, даже она не в состоянии объяснить все особенности их течения. И тем не менее на многие вопросы можно дать ответы.

Вопросом о причине образования извилин в руслах рек занимался Эйнштейн. В своем докладе «Причина образования извилин в руслах рек и так называемый закон Бэра», сделанном в 1926 году на заседании Прусской академии наук, Эйнштейн сравнил движение вращающейся воды в стакане и в руслах рек. Эта аналогия позволила объяснить тенденцию русел рек приобретать извилистую форму.

Попробуем разобраться в этом явлении хотя бы качественно. И начнем со стакана чая.

Как движутся чаинки в стакане

Возьмите стакан с чаем, хорошо размешайте чай ложкой, а затем выньте ее. Вода постепенно остановится, а чаинки соберутся в центре дна стакана. Что заставляет их «сбегаться» к центру? Чтобы ответить на этот вопрос, выясним сначала, какую форму принимает поверхность воды, вращающейся в стакане.

Из опыта видно, что поверхность жидкости искривляется. Легко понять, почему это происходит. Для того чтобы частички воды совершали вращательное движение, равнодействующая всех сил, действующих на каждую частичку, должна приводить к центростремительному ускорению.

kvant.mccme.ru

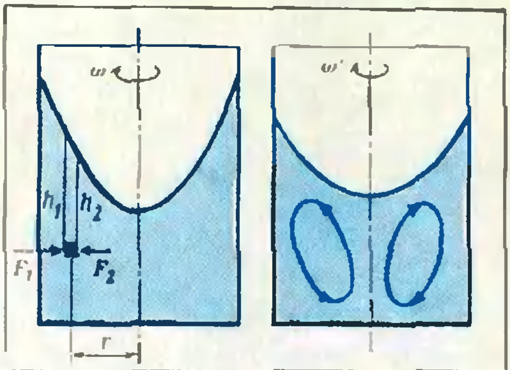


Рис. 1.

Выделим мысленно внутри жидкости на расстоянии r от оси вращения кубик массы Δm (на рисунке 1 такой кубик выделен синим цветом). При угловой скорости вращения ω центростремительное ускорение кубика равно $\omega^2 r$. Это ускорение создается разностью сил давления, действующих на боковые грани (левую и правую на рисунке 1) кубика. Следовательно,

$$\Delta m \cdot \omega^2 r = F_1 - F_2 = (p_1 - p_2) \cdot \Delta s, \quad (1)$$

где Δs — площадь боковой грани кубика. Давления p_1 и p_2 определяются расстояниями h_1 и h_2 до свободной поверхности жидкости —

$$p_1 = \varrho g h_1, \quad p_2 = \varrho g h_2, \qquad (2)$$

где ϱ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения. Так как сила F_1 должна быть больше силы F_2, то, следовательно, и h_1 должно быть больше h_2, то есть свободная поверхность жидкости при вращении должна искривиться так, как показано на рисунке 1. Чем больше скорость вращения, тем сильнее искривляется поверхность.

Можно найти форму искривленной поверхности жидкости. Она оказывается параболоидом, то есть поверхностью, разрез которой — парабола. (Покажите это самостоятельно. Правильность своих рассуждений вы сможете проверить, посмотрев на с. 59).

Пока мы мешаем чай ложкой, мы поддерживаем вращение жидкости. Но если вынуть ложку из стакана, то вследствие трения между отдельными слоями жидкости (вязкости) и трения о стенки и дно стакана кинетическая энергия будет переходить в тепло, и жидкость постепенно остановится.

По мере уменьшения частоты вращения поверхность жидкости выпрямляется. При этом внутри жидкости возникают вихревые потоки, направление которых показано на рисунке 2. Происхождение вихревых потоков связано с неодинаковым торможением жидкости у дна стакана и у поверхности. На глубине вследствие большого трения о дно стакана жидкость тормозится сильнее, чем у поверхности. Поэтому у частичек жидкости, находящихся на одинаковом расстоянии от оси вращения, оказываются разные скорости — чем ближе к дну стакана, тем меньше скорость. А равнодействующая сил «бокового» давления, действующих на такие частички, одна и та же. Эта сила уже не может по всей глубине вызвать необходимое центростремительное ускорение (как в случае вращения всей массы жидкости с одной и той же угловой скоростью). У поверхности угловая скорость слишком большая, и частицы воды отбрасываются к стенкам стакана: у дна угловая скорость мала, и результирующая сил давления заставляет воду двигаться к центру.

Теперь понятно, почему чаинки собираются в центре на дне стакана (рисунок 3) — они увлекаются возникающими при торможении вихревыми потоками. Конечно, такое рассмотрение — довольно упрощенное, но оно правильно отражает суть явления.

Как меняются русла рек

Давайте разберем характер движения воды в реке при повороте русла. Здесь возникает картина, похожая на движение воды в стакане. Поверхность воды наклоняется в сторону поворота так, чтобы разность сил давления сообщала необходимое центростремительное ускорение (на рисунке 4 показано вертикальное сечение реки на повороте). Так же как в стакане с чаем, скорость воды у дна вследствие трения меньше, чем у поверхности реки (распределение скоростей по глубине показано на рисунке 4; красным цветом выделена вертикальная плос-

kvant.mccme.ru

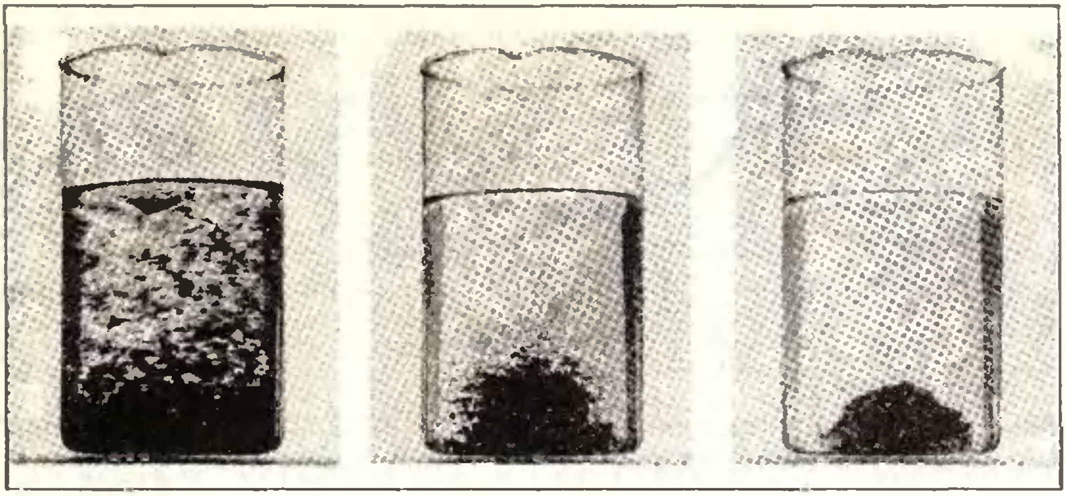


Рис. 2.

кость, перпендикулярная сечению реки). Поэтому у поверхности результирующая сил давления не в состоянии обеспечить движения частиц воды по окружности с большой скоростью, и вода «отбрасывается» к дальнему (от центра поворота) берегу. У дна, наоборот, скорость движения мала, и вода устремляется к ближнему берегу (к центру поворота). Таким образом, дополнительно к основному течению возникает циркуляция воды; на рисунке 4 показано направление циркуляции в плоскости сечения реки.

Такая циркуляция воды приводит к эрозии (разрушению) почвы. В результате далекий от центра поворота берег разрушается (подмывается), а у близкого берега постепенно осаждается все больший слой почвы (вспомните чаинки в стакане!). Форма русла меняется и

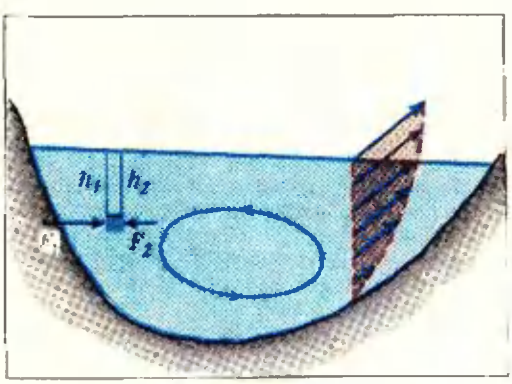


Рис. 3.

приобретает такой вид, как на рисунке 4.*)

Интересно проследить за тем, как меняется скорость воды по ширине реки (от берега к берегу). На прямолинейных участках русла с максимальной скоростью течет вода посередине реки. При изгибе русла линия тока, соответствующая максимальной скорости, смещается к дальнему от центра поворота берегу. Это происходит вследствие того, что повернуть быстрые частицы воды труднее, так как для этого необходимо создать большее центростремительное ускорение. Но там, где больше скорость течения, возникает и более сильная циркуляция воды и, соответственно, большая эрозия почвы. Вот почему самое быстрое место в русле реки обычно оказывается и самым глубоким. Это правило хорошо знают речники, осуществляющие навигацию.

Эрозия почвы у дальнего берега и ее осаждение у ближнего приводят к постепенному смещению всего русла реки в сторону от центра поворота и, тем самым, к увеличению изгиба реки. На рисунке 5 показаны профили дна в одном и том же месте русла реальной реки в разные годы. Ясно видно, как происхо-

*) Такая же циркуляция воды может возникнуть и при прямолинейном течении реки вследствие вращения Земли. В результате реки в северном полушарии размывают, главным образом, правый берег, а в южном — левый (это и есть закон Бэра). Но этот вопрос — тема для специальной статьи.

kvant.mccme.ru

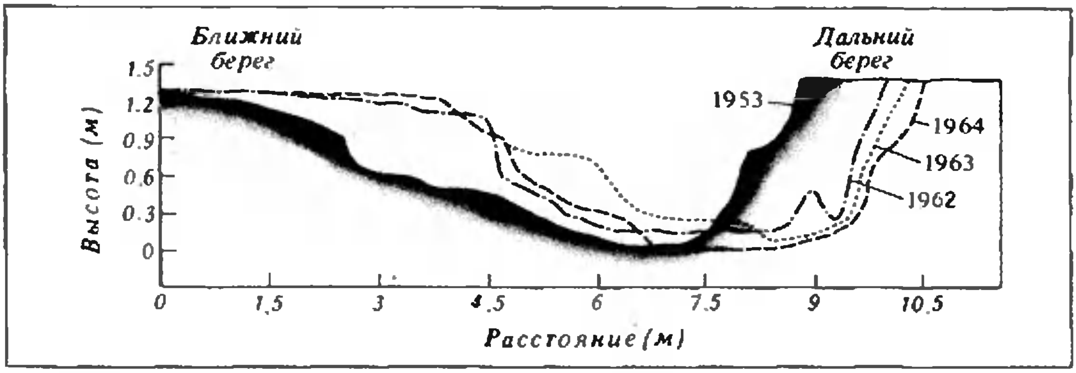


Рис. 4.

дило постепенное перемещение русла и увеличение изгиба.

Таким образом, даже небольшой начальный изгиб, возникший по случайной причине (например, вследствие обвала, падения дерева и т. п.), будет со временем увеличиваться. Прямолинейное течение реки по однородной равнине является неустойчивым.

Как образуются меандры рек

Форма русла реки во многом определяется рельефом местности. Река, текущая по неровной местности, извивается таким образом, чтобы избежать высоких мест и заполнить низины, выбирает путь с максимальным уклоном.

А как текут реки по равнинам? Как влияет на форму русла описанная выше неустойчивость прямолинейного течения реки по отношению к изгибам? Такая неустойчивость приводит к увеличению длины реки, и река начинает извиваться. Естественно думать, что в идеальном случае (совершенно ровная однородная местность) должна возникнуть периодическая кривая. Какова ее форма?

Геологи высказали предположение, что русла рек, текущих по равнинам, на изгибах должны принимать форму ... изогнутой линейки.

Возьмите стальную линейку и попытайтесь сжать линейку вдоль ее длины (уменьшить расстояние между ее концами). Линейка изогнется (как на рисунке 6). Такой упругий изгиб называют эйлеровым изгибом (по имени замечательного ученого, русского академика Леонарда Эйлера (1707—1783), теоретически рассмотревшего это явление). Форма изогнутой линейки описывается особой кривой. Эта эйлерова кривая обладает замечательным свойством: из всех кривых заданной длины, соединяющих данные точки, она в среднем наименее изогнута. Если измерить угловые отклонения Θ (см. рисунок 6) через равные расстояния вдоль длины кривой и просуммировать квадраты угловых отклонений, то для эйлеровой кривой эта сумма будет минимальной. Такой «экономный» изгиб эйлеровой кривой и послужил основанием для гипотезы о форме русел рек.

Геологи моделировали процесс изменения русла реки в искусственном канале, продолженном в однородной среде, которая приготовлялась из мелких частиц, слабо скрепленных между собой и потому довольно легко подвергающихся эрозии. Очень скоро прямолинейный канал начинал извиваться, причем форма изгибов описывалась именно эйлеровой кривой (рисунок 7). Ко-

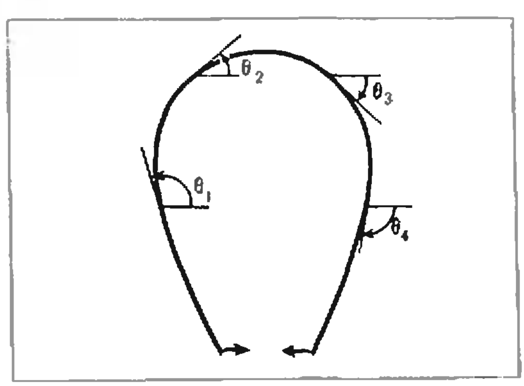


Рис. 5.

kvant.mccme.ru

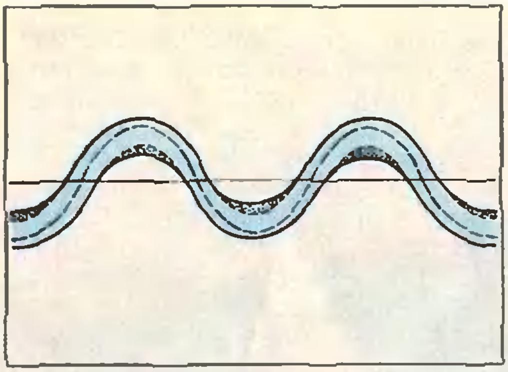


Рис. 6.

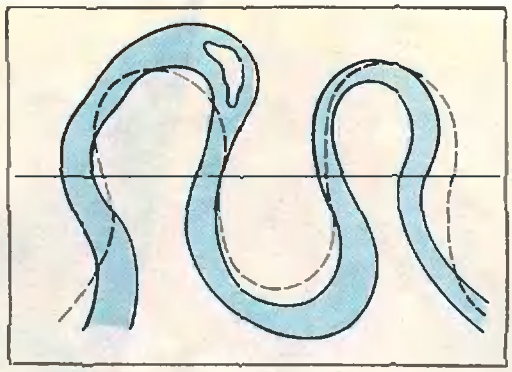


Рис. 7.

нечно, в реальных условиях такого совершенства в форме русел рек не наблюдается (например, из-за неоднородности почвы). Но на равнинах реки обычно изгибаются и образуют периодическую структуру. На рисунке 8 показаны русла реальных рек и пунктиром проведены эйлеровы кривые, наиболее близкие к форме русел.

Периодические изгибы русла называют меандрами. Происхождение этого термина связано с древнегреческим названием Меандр известной своими изгибами реки в Турции (современное название реки — Большой Мендерес). Меандрами сейчас называют и периодические изгибы океанских течений, а также ручьев, образующихся на ровной поверхности ледников. Во всех этих явлениях в однородных средах случайные процессы приводят к образованию периодической структуры, и хотя причины, вызывающие изгибы, могут быть разными, форма образующихся периодических кривых оказывается одинаковой.

О реках и озерах

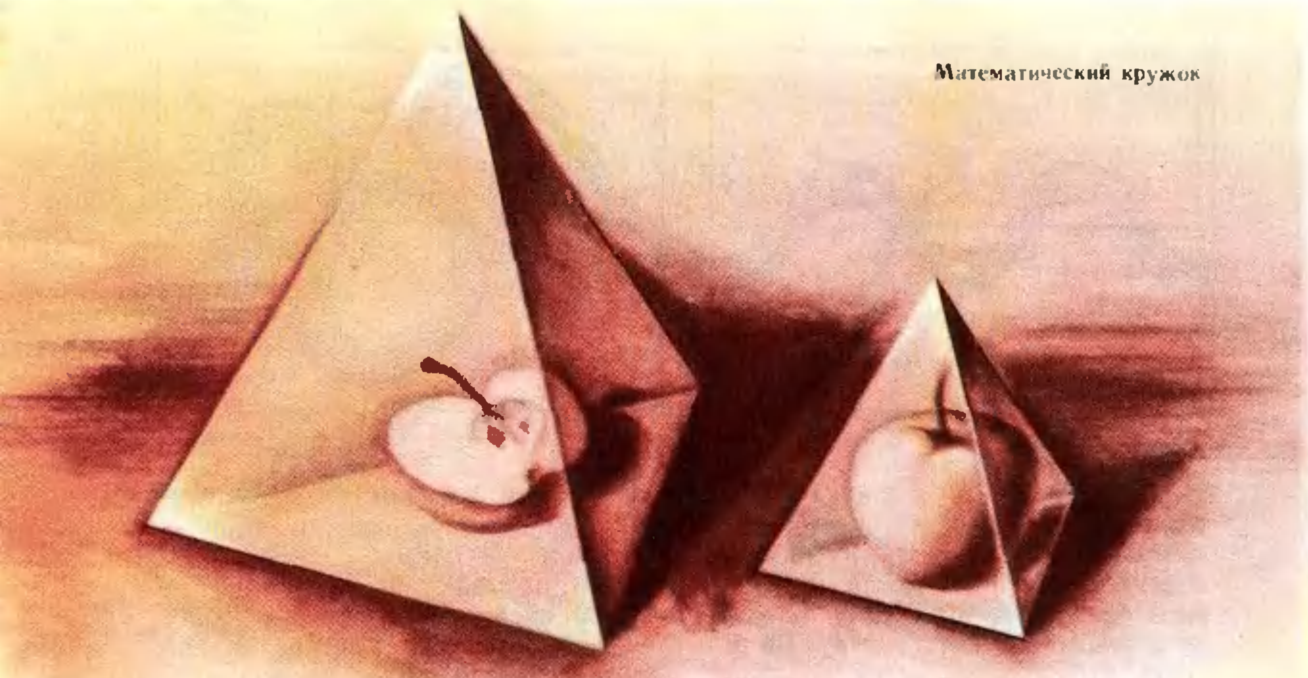
У богатыря Байкала было больше 300 сыновей и только одна дочь — красавица Ангара... Так начинается старинная легенда об озере Байкал, в которое втекают 336 рек, а вытекает из которого только одна река. Оказывается, этим славен не только Байкал. Сколько бы рек ни втекало в озеро, вытекает из него, как правило, всего одна.

Например, много рек втекает в Ладожское озеро, а вытекает из него только Нева; из Онежского озера вытекает одна Свирь и т. д. Это явление можно объяснить. Вода вытекает по самому глубокому руслу, а другие возможные истоки оказываются лежащими выше уровня воды в озере. Маловероятно, что возможные русла рек в местах истока будут точно на одинаковой высоте.

Если озеро достаточно *полноводное (в него втекает* много воды), то из озера могут вытекать и две реки. Однако такая ситуация неустойчива и возможна у сравнительно недавно образовавшихся (молодых) озер. Со временем река с более глубоким руслом, в которой скорость течения большая, будет размываться, что повлечет увеличение расхода воды и понижение ее уровня в озере. Сток воды через мелкую реку будет уменьшаться, и она постепенно занлится. Таким образом, «выживает» только самая глубокая из вытекающих рек.

Для того чтобы из озера могли вытекать одновременно две реки, необходимо, чтобы их русла у истока оказались точно на одинаковой высоте. В таком случае говорят, что происходит бифуркация (этот термин сейчас широко используют математики для обозначения удвоения числа решений уравнений). Бифуркация — редкое явление, и поэтому обычно из озера вытекает только одна река.

Аналогичные явления происходят при течении *рек*. Известно, что реки сливаются с большой охотой, а вот раздвоение реки наблюдается сравнительно редко. Последнее — опять пример бифуркации. Река в каждом месте течет по кривой максимального уклона, и маловероятно, чтобы в какой-то точке произошло раздвоение этой кривой. В дельте реки ситуация, однако, меняется. Подумайте сами, *почему* это *происходит*.



Об одной олимпиадной задаче

(или может ли в меньшем быть чего-нибудь больше?)

В. М. ТИХОМИРОВ

Как-то раз — это было давным-давно, тридцать с чем-то лет тому назад — руководитель кружка, таинственно улыбнувшись, задал нам такой вопрос:

«Один тетраэдр лежит внутри другого. Как вы думаете, может ли сумма его ребер оказаться больше, чем сумма ребер объемлющего тетраэдра?»

Мы дружно закричали: «Нет!» — «А кто-нибудь может это доказать?» И тогда один из нас воскликнул: «А чего тут доказывать: *разве у меньшего может быть чего-нибудь больше?*» — «Это что — аксиома?» — «Нет, но...» — «А не аксиома — докажи!» — «Но это же очевидно!» Они препирались еще немного, и вдруг раздался удивленный возглас: «А ведь может!»

Эта сценка вспомнилась мне в апреле прошлого года в Одессе, когда проходил второй тур XVI Всесоюзной математической олимпиады. Там десятиклассникам была предложена такая задача:

*Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на ребрах другого тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин всех ребер тетраэдра $KLMN$ меньше, чем 4/3 суммы длин всех ребер тетраэдра $ABCD$**).

(Отметим, что число 4/3 в формулировке нашей задачи не может быть уменьшено. Для того чтобы понять это, достаточно рассмотреть правильную треугольную пирамиду $ABCD$ с очень большим в сравнении с ребром основания ABC боковым ребром и взять точки K и L где-нибудь на основании, а две другие точки M и N — где-то у вершины D.)

С этой задачей справились лишь четверо участников из пятидесяти трех. Но все решения оказались очень красивыми, и мне захотелось о них рассказать.

Начну с чисто геометрического решения, целиком лежащего в русле школьной математики. Оно принадлежит школьнику из города Димитровграда Ульяновской области Ильмуру Зиганшину.

Введем сначала некоторые обозначения. Пусть KLM — грань тетраэд-

*) Полное решение этой задачи приводится на с. 42 (задача М759). Но не спешите знакомиться с ним. Советуем сначала дочитать статью до конца и попробовать с ее помощью найти решение самостоятельно.

kvant.mccme.ru

kvant.mccme.ru

ра $KLMN$, имеющая наибольший периметр среди всех граней этого тетраэдра. Спроектируем тетраэдр $ABCD$ на плоскость грани KLM. Проекции вершин тетраэдра обозначим соответственно A_1, B_1, C_1, D_1. Проекция всего тетраэдра $ABCD$ — это либо треугольник (и тогда одна из точек A_1, B_1, C_1 или D_1 лежит внутри треугольника, образованного остальными точками), либо выпуклый четырехугольник, ограниченный ломаной $A_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок). Ломаную, ограничивающую проекцию тетраэдра $ABCD$, обозначим через Г (на рисунке она прорисована более жирными линиями). Ясно, что $\triangle KLM$ лежит внутри Г. Для любых четырех точек пространства E, F, G, H (они могут оказаться в одной плоскости, некоторые из них могут совпадать и т. п.) через P_{EFGH} обозначим величину $|EF|+|FG|+|EG|+|EH|+|FH|+|GH|$ и назовем ее *периметром* $EFGH$. Периметр треугольника KLM и длину ломаной Г обозначим P_{KLM} и P_{Γ} соответственно.

Решение Зиганшина основано на четырех вспомогательных утверждениях, которые представляют интерес и сами по себе. Они сформулированы в виде задач, продумайте их самостоятельно.

Задача 1. *Если грань KLM имеет периметр, не меньший, чем периметр каждой из остальных трех граней тетраэдра $KLMN$, то*

$$P_{KLMN} \leqslant 2P_{KLM}. \qquad (1)$$

Задача 2. *Если треугольник KLM лежит внутри выпуклой ломаной Г, то*

$$P_{KLM} \leqslant P_{\Gamma}. \qquad (2)$$

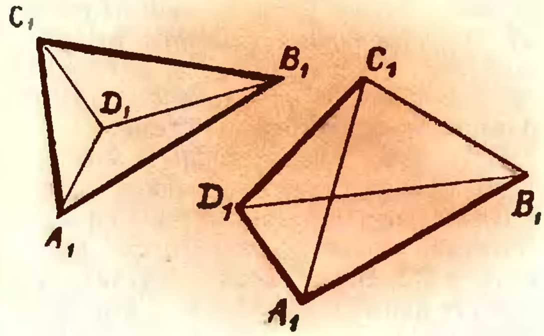
Задача 3. *Если ломаная Г ограничивает проекцию на плоскость тетраэдра $ABCD$ и при этом A_1, B_1, C_1, D_1 — проекции вершин тетраэдра, то*

$$P_{\Gamma} < \frac{2}{3} P_{A_1B_1C_1D_1}. \qquad (3)$$

Задача 4. *Если $A_1B_1C_1D_1$ — проекции вершин тетраэдра $ABCD$ на некоторую плоскость, то*

$$P_{A_1B_1C_1D_1} \leqslant P_{ABCD}. \qquad (4)$$

Из соотношений (1)—(4) решение



основной задачи следует немедленно

$$P_{KLMN} \overset{(1)}{\leqslant} 2P_{KLM} \overset{(2)}{\leqslant} 2P_{\Gamma} \overset{(3)}{<} 2\cdot\frac{2}{3} P_{A_1B_1C_1D_1} \overset{(4)}{\leqslant} \frac{4}{3} P_{ABCD},$$

что и требовалось доказать. Если вы хорошенько потрудитесь и докажете все утверждения задач 1—4, то вы непременно получите удовольствие от естественности и красоты замысла этого решения.

Сходным с зиганшинским было решение победителя олимпиады среди десятиклассников ленинградского школьника Гриши Перельмана.

Два других решения выходят за рамки школьной программы. Здесь, пожалуй, уместно сделать одно замечание. Обычно более всего ценятся такие олимпиадные задачи, для решения которых знание высших разделов математики не может особенно помочь и математик-профессионал не имеет преимущества перед школьником. Однако удовлетворить этому требованию удается не всегда. И вот здесь как раз тот случай, когда знание некоторых фактов «нешкольной» математики позволяет получить доказательство очень быстро. При этом решение достигается двумя совершенно разными путями. Удивительно, что оба эти способа решения были найдены школьниками.

Сначала я расскажу о решении Андрея Савкина (Ленинград).

В начале своего решения Савкин формулирует следующую теорему: *Пусть заданы две системы векторов в трехмерном пространстве, обладающие следующим свойством: если взять любую прямую и спроектировать на нее все векторы обеих систем,*

kvant.mccme.ru

то сумма длин проекций векторов первой системы будет не меньше суммы длин проекций векторов второй системы. Тогда сумма длин векторов первой системы не меньше суммы длин векторов второй системы.

Я не знаю, как эту теорему можно доказать средствами школьной математики (хотя с помощью высшей математики она доказывается просто).*) Однако в плоском случае вы можете попытаться доказать этот результат**).

Задача 5. *Пусть $\overrightarrow{A_1B_1}, \ldots, \overrightarrow{A_nB_n}$ и $\overrightarrow{A'_1B'_1}, \ldots, \overrightarrow{A'_mB'_m}$ — две системы двумерных векторов, обладающие тем свойством, что для любой прямой l*

$$|\text{пр}_l\overrightarrow{A_1B_1}|+\ldots+|\text{пр}_l\overrightarrow{A_nB_n}| > |\text{пр}_l\overrightarrow{A'_1B'_1}|+\ldots+|\text{пр}_l\overrightarrow{A'_mB'_m}|.$$

Тогда

$$|\overrightarrow{A_1B_1}|+\ldots+|\overrightarrow{A_nB_n}| > |\overrightarrow{A'_1B'_1}|+\ldots+|\overrightarrow{A'_mB'_m}|.$$

С помощью приведенной теоремы решение нашей задачи получается следующим образом.

Рассмотрим отрезки AB, BC, AC, AD, BD и CD и спроектируем их на любую прямую l. Образом будет некоторый отрезок Δ_1, причем каждая внутренняя точка отрезка Δ_1 будет покрыта проекциями не менее чем трех рассматриваемых отрезков. Далее, спроектируем на l отрезки KL, LM, KM, KN, LN и MN. Образом будет некоторый отрезок Δ_2, причем $\Delta_2 \subset \Delta_1$ (ибо тетраэдр $KLMN$ лежит внутри тетраэдра $ABCD$) и каждая точка отрезка Δ_2 будет покрыта проекциями не более чем четырех из этих отрезков (ибо сечение тетраэдра плоскостью — это либо точка, либо отрезок, либо треугольник, либо четырехугольник). Отсюда сразу получаем

$$|\text{пр}_l\overrightarrow{KL}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{LM}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{KM}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{KN}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{LN}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{MN}| < 4|\Delta_2| < \frac{4}{3}\cdot 3|\Delta_1| <$$
$$< \frac{4}{3}\left(|\text{пр}_l\overrightarrow{AB}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{BC}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{AC}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{AD}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{BD}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{CD}|\right),$$

где $|\Delta_1|$ и $|\Delta_2|$ — длины соответствующих отрезков. Из написанного соотношения и теоремы о системах векторов немедленно вытекает, что

$$P_{KLMN} < \frac{4}{3}P_{ABCD}.$$

Остается еще

Задача 6. *Доказать, что случай равенства невозможен.*

Так завершается решение Савкина.

И, наконец, о последнем решении, предложенном школьником из московского физико-математического интерната Сашей Спиваком. Спивак ставит следующую задачу на максимум: *среди всех тетраэдров $KLMN$, расположенных внутри заданного тетраэдра $ABCD$, найти тетраэдр с наибольшим периметром (то есть суммой ребер)*. Прежде всего возникает вопрос: а существует ли тетраэдр с наибольшим периметром (ведь не всякая задача на максимум имеет решение, скажем, задача — найти максимум функции $y = \operatorname{arctg} x$, где x пробегает все вещественные числа, — решения не имеет)?

В учебнике «Алгебра и начала анализа 9—10» (п. 28) вы можете прочитать про теорему Вейерштрасса, согласно которой *непрерывная функция на конечном отрезке достигает своего максимального (и минимального) значения.* Теорема Вейерштрасса допускает очень далекое обобщение, из которого следует, что поставленная выше задача на максимум действительно имеет решение. Обозначим вершины «максимального» тетраэдра через K_0, L_0, M_0, N_0. Так вот, оказывается, что *эти точки обязаны совпадать с точками A, B, C или D*. Действительно, если, скажем, N_0 не совпадает ни с A, ни с B, ни с C, ни с D, то найдется целый отрезок $[NN']$ с серединой в N_0, лежащий в тетраэдре $ABCD$. А тогда все вытекает из такого утверждения:

*) Доказательство опирается на то, что *средняя длина* проекции вектора на всевозможные прямые (на плоскости или в пространстве) пропорциональна длине вектора и не зависит от его направления. Подробнее об этом рассказывается в статье Ю. Ионина, А. Плоткина «Среднее значение функции» («Квант», 1977, № 7).

**) Он был использован также в решении задачи M747 («Квант», 1982, № 11), где приводилось и его доказательство.

З а д а ч а 7. *По крайней мере у одного из тетраэдров $K_0L_0M_0N$ или $K_0L_0M_0N'$ периметр больше, чем у тетраэдра $K_0L_0M_0N_0$*).*

А раз у максимального тетраэдра каждая вершина совпадает с одной из точек A, B, C или D, то следует лишь рассмотреть этот вырожденный случай.

З а д а ч а 8. *Пусть каждая из точек K, L, M и N совпадает с одной из точек A, B, C или D. Тогда*

$$P_{KLMN} < \frac{4}{3} P_{ABCD}$$

Так завершается решение Спивака. Мы видим, что для математика-профессионала его можно сконцентрировать в одной фразе: *вследствие теоремы Вейерштрасса решение задачи о вложенном тетраэдре максимального периметра существует, а вследствие выпуклости функции расстояния это решение сосредоточено в вершинах тетраэдра $ABCD$, что сводит общую проблему к вырожденной (задаче 8).*

Отметим, что авторское решение основывалось также на задаче 7: чуть более тонкое ее применение позволяет избежать ссылки на теорему Вейерштрасса**).

На этом можно было бы и закончить, но еще несколько слов — попутных. В последнем решении нашел отражение важный принцип для задач на максимум и минимум: *максимальное значение выпуклой функции на многограннике (если оно существует) достигается в вершине многогранника.* Этот принцип играет важную роль в линейном программировании — разделе математики, имеющем большое применение в экономике (см. об этом, например, в статье З. Л и т о в ч е н к о «Лучший вариант» («Квант», 1978, № 5)). В предпоследнем решении мы столкнулись с одним из сравнительно новых понятий математики — понятии вариации (о нем рассказывается в прекрасно написанной статье В. И. А р н о л ь д а в сборнике «Математическое просвещение», вып. 2, (М., ГТТИ, 1957) в разделе «Математический кружок»).

И в заключение — несколько вопросов на тему о том, может ли в меньшем быть чего-нибудь больше.

Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ лежит в треугольнике ABC.

а) Может ли наименьшая высота (медиана, биссектриса) треугольника $A_1B_1C_1$ быть больше наименьшей высоты (медианы, биссектрисы) треугольника ABC?

б) Может ли наибольшая высота (медиана, биссектриса) треугольника $A_1B_1C_1$ быть больше наибольшей высоты (медианы, биссектрисы) треугольника ABC?

в) Может ли радиус вписанной окружности (описанной окружности) треугольника $A_1B_1C_1$ быть больше чем радиус вписанной окружности (описанной окружности) треугольника ABC?

г) Может ли сумма квадратов сторон треугольника $A_1B_1C_1$ быть больше суммы квадратов сторон треугольника ABC?

д) Может ли сумма медиан треугольника $A_1B_1C_1$ быть больше суммы медиан треугольника ABC?

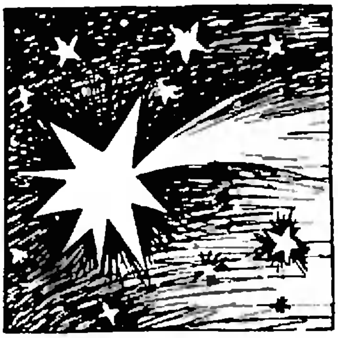
Возможно, среди читателей «Кванта» есть такие, которые читали про многомерную геометрию. Они могут поразмышлять над n-мерным обобщением нашей задачи о тетраэдрах. Например, подумать, во что превратится множитель 4/3 в четырехмерном случае.

---

*) Для тех из вас, кто знаком с понятием выпуклости, задача 7 будет особенно легкой, ибо ее решение сразу следует из выпуклости функции расстояния. (Согласно одному из определений, функция, заданная на точках пространства, называется *выпуклой*, если ее значение в середине любого отрезка не превосходит полусуммы значений в его концах.)

**) См. решение задачи М759.

kvant.mccme.ru



Самый далекий квазар

В начале прошлого года в печати появилось сообщение о том, что английские и австралийские астрономы обнаружили новый светящийся объект, который расположен от нас дальше всех других небесных объектов. Оказалось, что это квазар, находящийся в созвездии Стрельца (его экваториальные координаты: склонение $+33°$ и прямое восхождение 1,3 с).

Квазары (квазизвезды) были открыты около двадцати лет тому назад. Так стали называть далекие космические тела, которые по внешнему виду на фотографиях похожи на звезды, но их излучение по мощности сравнимо с излучением целых галактик. (Например, квазар, о котором пойдет здесь речь, излучает в 10^{14} раз больше энергии, чем Солнце.) Квазары расположены не в нашей Галактике, а очень далеко за ее пределами, на расстояниях в несколько миллиардов световых лет.

Как же можно определить расстояние до квазара? Оказывается, для этого нужно измерить его красное смещение. Объясним, что это значит.

При сравнении спектров химических элементов, входящих в состав квазаров, со спектрами тех же элементов на Земле было обнаружено, что линии в спектрах квазаров сильно смещены в сторону больших длин волн, то есть к красному концу спектра. Если обозначить через λ наблюдаемую длину волны, а через λ_0 — эталонную земную, то величина

$$z=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}$$

и называется красным смещением. Характерно, что для всех линий спектра данного квазара z одно и то же. С другой стороны, известно, что длина волны, излучаемая источником, меняется при движении источника и наблюдателя относительно друг друга. (Этот эффект называется эффектом Доплера.) В частности, если источник движется от наблюдателя, наблюдатель фиксирует бóльшую длину волны.

Таким образом, был сделан вывод, что квазары удаляются от нас, причем удаляются с очень большими скоростями. Для этого случая теория относительности дает формулу

$$\lambda=\lambda_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}},$$

где c — скорость света, а v — скорость источника относительно наблюдателя. Зная красное смещение z, из этой формулы можно найти скорость v. Так, скорость вновь открытого квазара равна $v=0{,}92c$. Это — самая большая скорость, которую когда-либо наблюдали астрономы.

Теперь, когда известна скорость квазара, можно оценить и расстояние до него. Для этого надо воспользоваться тем, что указанная скорость v связана с расстоянием R до квазара законом Хаббла (законом «разбегания» галактик):

$$v=HR.$$

Величину H называют постоянной Хаббла. Ее точное значение измерить трудно; в настоящее время на основе многолетних наблюдений принято значение $H\approx2{,}5\cdot10^{-18}\text{с}^{-1}$.

Для квазара, удаляющегося от нас со скоростью $0{,}92\ c$, получаем

$$R\approx1{,}1\cdot10^{26}\text{м}\approx1{,}2\cdot10^{10}\ \text{св. лет}.$$

Другими словами, можно сказать, что этот квазар мы видим таким, каким он был приблизительно 12 миллиардов лет тому назад. Если вспомнить, что возраст Вселенной оценивается в 13—15 миллиардов лет, «древность» обнаруженного квазара, безусловно, должна внушать уважение.

Я. С.

kvant.mccme.ru

Что такое стробоскоп

С. Л. ГАВРИЛОВ

Часто на киноэкранах можно наблюдать такое странное явление: у движущегося автомобиля колёса вращаются в обратном направлении. Это пример так называемого стробоскопического эффекта. Прежде чем начать разговор о нем, давайте проведем несложный эксперимент.

Из плотной бумаги вырежем круг диаметром около двадцати сантиметров и на краю его напишем какую-нибудь букву размером приблизительно в 1 см. Диск этот насадим на ось, например на вязальную спицу. Если спицу быстро раскрутить, буква превратится в сплошную темную полоску. Казалось бы, разглядеть букву, не останавливая диск, невозможно. Но это не так.

Вырежем еще один такой же круг и прорежем по его радиусу щель шириной 2—3 мм и длиной 4—5 см. Насадим этот круг на ту же ось так, чтобы сквозь прорезь на нем была видна буква на первом диске. Опять закрутим ось, но теперь даже при большой скорости вращения мы будем видеть букву практически неподвижной. (Чтобы добиться максимальной четкости изображения, нужно опытным путем подобрать оптимальный угол наблюдения.)

Как же получилось, что буква, которая раньше расплывалась и была недоступной для нашего зрения, теперь стала хорошо видимой? Попробуем разобраться.

Предположим, что диск освещается (или делается видимым глазу каким-либо иным способом) не все время, а периодически, через равные промежутки времени. Когда период освещения точно совпадает с периодом обращения диска, при каждой вспышке мы будем видеть диск в одной и той же стадии вращения. И если время между вспышками не превышает времени сохранения зрительных ощущений, что составляет примерно 0,3 секунды (а в случае особо возбудимых глаз — до 0,5 секунды), отдельные мгновенные изображения диска сольются в одно «непрерывное» изображение. Диск будет казаться неподвижным. Если же интервалы между двумя последовательными вспышками немного больше периода вращения диска, то во время каждой последующей вспышки мы будем видеть диск во все более поздних стадиях движения. Нам будет казаться, что диск медленно вращается в том же направлении, в каком это происходит в действительности. В случае если период освещения несколько меньше периода вращения, мы каждый раз будем видеть диск во все более ранних стадиях движения, и нам покажется, что диск медленно вращается в противоположном направлении. (Очевидно, что период кажущегося вращения зависит от разности между периодами освещения и действительного вращения диска.)

Эффект, о котором идет речь, называется стробоскопическим, а прибор, позволяющий «останавливать» или «замедлять» движущиеся тела,— стробоскопом. Название произошло от греческих слов «стробос» — кружение и «скопос» — наблюдение.

Простейший стробоскоп представляет собой диск из тонкого картона, по радиусу которого вырезана щель шириной 2—3 мм. Диск можно закрепить на оси ручного точила (вместо точильного круга) или механической дрели. Изменяя скорость вращения диска, можно добиться, например, «остановки» колебаний маятника стенных часов или грузика на пружине. Для этого нужно лишь посмотреть на маят-

kvant.mccme.ru

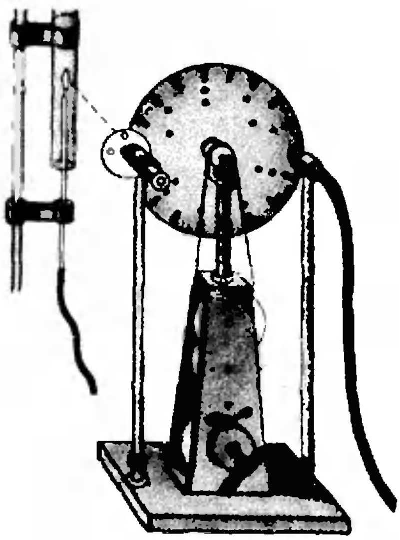


Рис. 1. Фотография одного из старинных стробоскопов.

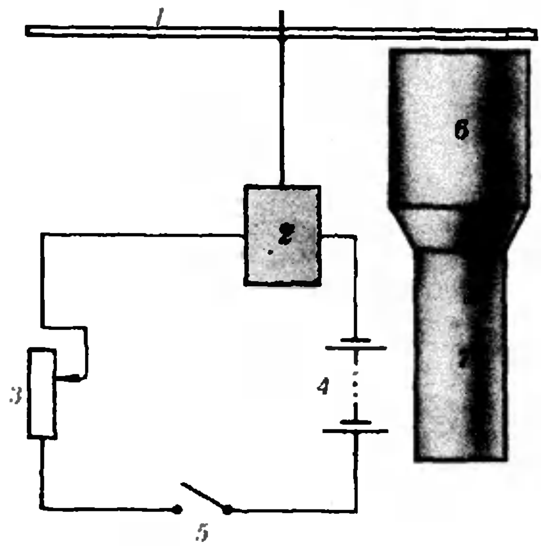


Рис. 2. Стробоскоп, создающий прерывистое освещение: 1 — диск с прорезями, 2 — электродвигатель, 3 — реостат, 4 — источник тока, 5 — ключ, 6 — картонная труба, 7 — фонарь.

ник или грузик сквозь крутящийся диск.

Если в диске прорезать не одну, а несколько (например, 10 или 20) щелей на равном расстоянии друг от друга, то можно будет наблюдать и более быстрые движения, скажем — вращение лопастей вентилятора. Лопасти работающего вентилятора практически невидимы для нас — они сливаются в один полупрозрачный диск. А с помощью стробоскопа их можно разглядеть, не останавливая вентилятор. Тем-то и полезен стробоскоп, что он позволяет наблюдать столь быстрые процессы, за которыми наш глаз, из-за его инерционности, уследить не в состоянии. Схема одного из подобных опытов приведена на рисунке 1.

Но еще удобнее работать со стробоскопом, который создает прерывистое освещение (рис. 2). Для этого вращающийся картонный диск с прорезями нужно поместить перед источником света. В качестве источника света годится обычный круглый фонарь, работающий от трех батареек. Он дает достаточно света, и его световой пучок хорошо сфокусирован. Диск можно приводить в движение моторчиком от электроконструктора. Чтобы изменять скорость вращения, нужно последовательно с моторчиком включить реостат на 40—50 Ом и менять его сопротивление. Наблюдения проводят в темноте — исследуемый предмет освещается только мигающим светом стробоскопа.

Используя такой стробоскоп, можно, например, измерять скорости и ускорения движущихся поступательно тел (об этом рассказано в учебнике физики для 8 класса: «Физика 8», 1982, с. 39). Но, пожалуй, самый эффектный опыт — это наблюдение распадения тонкой струи жидкости на капли. Представьте себе, например, несильную струю воды, вытекающей из водопроводного крана. Из гидродинамического принципа неразрывности струи следует, что свободная струя по мере возрастания скорости жидкости (в поле тяжести земли) должна уменьшаться в сечении. И если бы не поверхностное натяжение, сечение струи уменьшалось бы неограниченно. Наличие же поверхностного натяжения приводит к тому, что при достаточно малом сечении струя начинает распадаться на капли. Объясняется это тем, что энергия поверхностного натяжения сферической капли меньше, чем цилиндрической струи, а любая система всегда стремится к состоянию с наименьшей энергией. Инерционность нашего зрения не позволяет нам разглядеть

kvant.mccme.ru

отдельные капли — струя кажется глазу монолитной и неподвижной. Если же наблюдать тонкую струю с помощью стробоскопа, видны отдельные капли, как бы висящие в воздухе (рис. 3).

Струя, вытекающая из-под крана с большим напором, при стробоскопическом освещении тоже выглядит не так, как мы привыкли ее видеть. Из-за завихрений, возникающих при быстром течении жидкости, струя в каждый момент времени имеет узловатую форму с причудливыми боковыми выростами.

Любопытно, что стробоскопический эффект был известен еще в глубокой древности, на что, например, бесспорно указывают строки из поэмы Лукреция «О природе вещей» (I век до н. э.). Но затем долгое время на него не обращалось никакого внимания. Вновь описания стробоскопических явлений появились лишь в первой половине XIX века в работах Фарадея, Плато и других ученых. Исследователи не сразу поняли, что это не просто забавный оптический обман, а прекрасное средство для изучения быстрых периодических процессов. Однако со временем стробоскоп занял подобающее место в лабораториях и служил верой и правдой вплоть до появления методов мгновенной фотосъемки, позволяющей буквально «остановить мгновение».

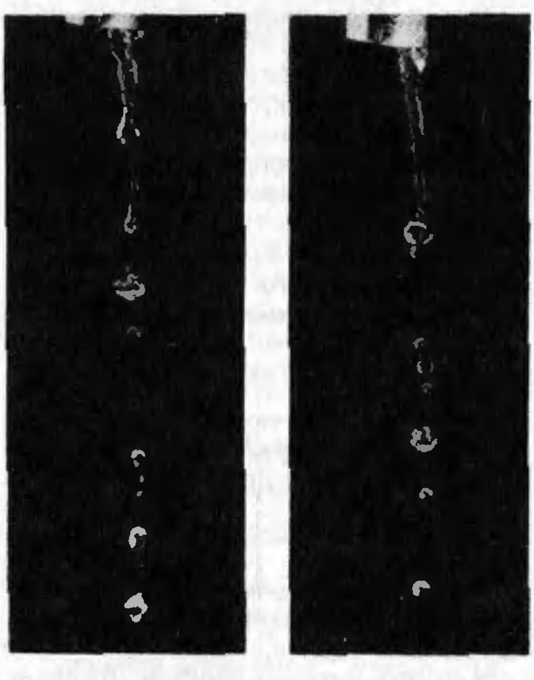


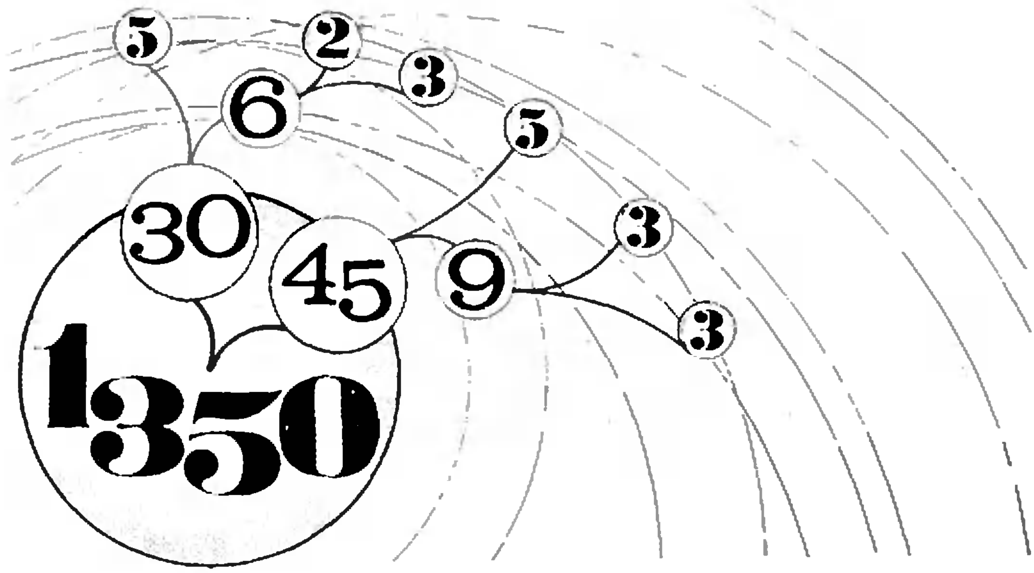
Рис. 3. Монолитная струя воды, сфотографированная при стробоскопическом освещении.

Так, в XIX веке при помощи стробоскопа были осуществлены исследования в области акустики, механических колебаний, гидродинамики и даже физиологии и зоологии.

Не утратил своего значения стробоскоп и в наши дни. В частности, его применяют, когда нужно измерять или контролировать частоту вращения каких-либо механизмов. Так например, во многих высококачественных электропроигрывателях с помощью стробоскопа осуществляется подстройка скорости вращения диска. Для этого на боковую поверхность диска наносят чередующиеся темные и светлые полоски, изображения которых с помощью оптической системы проецируют на экран на панели проигрывателя. Полоски освещаются лампочкой, мигающей со строго постоянной частотой. Она подбирается так, чтобы за время между двумя вспышками край диска прошел расстояние, равное как раз расстоянию между двумя соседними темными полосками, тогда изображение полос на экране будет неподвижным. Если скорость диска будет отличаться от номинальной, изображение полос начнет двигаться. «Остановить» его можно специальной ручкой регулировки скорости вращения диска.

Еще один пример использования стробоскопического эффекта для современных исследований — создание стробоскопического осциллографа. Этот прибор позволяет наблюдать периодические сигналы длительностью менее 10^{-10} с (это в 100 раз меньше длительности сигналов, «воспринимаемых» обычным высокочастотным осциллографом). Работа такого сверхбыстрого осциллографа аналогична работе простого механического стробоскопа в режиме, когда действительная частота колебаний во много раз больше кажущейся. Только здесь роль стробоскопа выполняет точная и сложная электроника.

kvant.mccme.ru



Арифметика и принципы подсчета

И. Б. ВАСИЛЬЕВ,
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

В основе математики лежит арифметика — теория натуральных чисел 1, 2, 3, ... В теории чисел много глубоких и красивых теорем. Немало в ней трудных и до сих пор не решенных проблем, в течение сотен лет не поддающихся усилиям самых выдающихся математиков. Целые разделы современной математики возникли из попыток решения и обобщения теоретико-числовых задач. К. Ф. Гаусс (1777—1855), сделавший много замечательных открытий в теории чисел и в других областях математики, сказал: «Математика — царица наук, теория чисел — царица математики».

Цель этой статьи — познакомить читателей с простейшими понятиями этой увлекательной науки, основной теоремой арифметики, некоторыми арифметическими функциями и принципами подсчета.

§ 1. Простые и составные числа

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело с натуральными числами. Мы говорим, что число n *делится* на число a, если существует такое число b, что $n = ab$. В этом случае число a называется *делителем* числа n, а число n называется, в свою очередь, *кратным* числу a.

Всякое натуральное число, большее единицы, имеет, по крайней мере, два делителя: 1 и само это число. Число, большее 1, называется *простым*, если у него нет других делителей, и *составным*, если они есть. Единица при этом не является ни простым, ни составным числом.

Каждое натуральное число можно разложить в произведение простых.

В самом деле, составное число n можно разложить в произведение двух множителей, меньших n. Если среди них есть не простые (составные), можно каждое из них разложить в произведение двух меньших

kvant.mccme.ru

и т. д. Очевидно этот процесс не может продолжаться бесконечно, потому что на каждом шагу мы получаем меньшие множители, чем на предыдущем, а всего натуральных чисел, меньших n, конечное число: $n-1$. В результате мы приходим к разложению числа на простые множители.

Обычно одинаковые простые множители собирают вместе и записывают разложение в таком стандартном виде:

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k},$$

где $p_1<p_2<\ldots<p_k$ — различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные числа. Например, $1350=2\cdot3^3\cdot5^2$.

> *Основная теорема арифметики.* Всякое натуральное число, большее 1, разлагается на простые множители единственным образом.

Основной эта теорема называется потому, что практически все свойства делимости чисел являются ее следствиями.

Мы не будем останавливаться на доказательстве основной теоремы (его можно найти, например, в [1], [3]), а сформулируем лишь одно ее следствие.

> Для того чтобы число a делилось на число b, необходимо и достаточно, чтобы каждый простой множитель, входящий в разложение числа b, входил в разложение a в такой же или в более высокой степени.

А как разложить большое число на простые множители? В этом нам поможет такое полезное наблюдение.

> Если число n составное, то у него есть делитель, не превосходящий $\sqrt{n}$ и больший 1.

Допустим противное. Пусть $n=ab$, и оба делителя a и b больше, чем $\sqrt{n}$. Поскольку $a>\sqrt{n}$ и $b>\sqrt{n}$, получаем, что $ab>n$, что противоречит предположению.

Чтобы убедиться в простоте данного числа n или, если n составное, найти его делитель, достаточно проверить, делится ли n на простые числа, не большие $\sqrt{n}$.

Составить список простых чисел, не превосходящих заданного числа N, можно таким образом. Надо выписать подряд все натуральные числа от 1 до N, вычеркнуть единицу, потом вычеркнуть все четные числа, кроме числа 2, затем вычеркнуть все числа, кратные 3, кроме самого числа 3, затем — кратные 5, и т. д. вплоть до самого большого простого числа, не превосходящего $\sqrt{N}$. После вычеркивания чисел, кратных какому-то простому числу p, первое не вычеркнутое число и будет следующим за p простым числом. Этот метод просеивания чисел называется «решетом Эратосфена». Он не так плох, как кажется на первый взгляд: например, чтобы составить таблицу простых чисел до 2000, достаточно вычеркнуть все кратные первым четырнадцати простым числам от 2 до 43 (так как $47^2>2000>43^2$). С помощью современных ЭВМ составлены очень большие таблицы простых чисел. Здесь, конечно, стоит заметить, что все простые числа выписать нельзя: как умел доказывать еще Евклид,

> Существует бесконечно много простых чисел.

Предположим, что простых чисел — конечное число и p — самое большое из них. Рассмотрим произведение $p!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot p$ всех чисел от 1 до p ($p!$ читается «p факториал»). Число $p!$ делится на все простые числа, так как, по предположению, в произведении $p!$ содержатся все простые числа. Следующее за ним в натуральном ряду число $p!+1$ должно раскладываться на простые множители, но это невозможно, так как $p!+1$ не делится ни на одно из простых чисел! Противоречие.

Многие древние и до сих пор до конца не решенные проблемы теории чисел относятся к распределению простых чисел в натуральном ряду.

kvant.mccme.ru

Например, наблюдения показывают, что встречаются рядом стоящие простые нечетные числа: 3 и 5, 5 и 7, 17 и 19, 29 и 31 и т. п. Такие числа называются *простыми близнецами*. До сих пор не известно, конечно или бесконечно количество пар простых близнецов.

С другой стороны, между простыми числами могут встречаться сколь угодно большие промежутки, точнее

> Для любого k в натуральном ряду существует k последовательных составных чисел.

В самом деле, возьмем число $(k+1)!$ и рассмотрим ряд из k последовательных чисел:

$$(k+1)!+2;\ (k+1)!+3;\ (k+1)!+4;\dots\\ \dots;\ (k+1)!+k+1,$$

Все они — составные: первое делится на 2, второе — на 3, ..., последнее — на $k+1$.

Задачи

1. Разложите на простые множители числа *а*) 1981; *б*) 1982; *в*) 1983; *г*) 1984.

Решение задачи 1*в*). Разделив 1983 на 3, получим $1983=3\cdot 661$. Теперь ищем делители числа 661. Так как $25^2<661<26^2$, нужно проверить делимость на простые числа 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Ни на одно из них 661 не делится, значит, 661 — простое число.

2. Укажите в натуральном ряду *а*) шесть; *б*) тринадцать последовательных составных чисел.

в) Существуют ли такие соседние простые числа, между которыми в натуральном ряду помещается ровно шесть составных чисел?

3. Докажите, что если d — наибольший делитель составного числа n, меньший n, то число n/d — простое.

4. Докажите, что среди натуральных чисел от 1 до $30m$ не более $10m$ простых чисел (при каждом $m=1, 2, 3, \dots$).

5. Найдите все такие числа p, что числа p, $p+2$, $p+4$ одновременно являются простыми (такие числа можно назвать простыми «тройнями»).

6. Каким количеством нулей кончается десятичная запись числа 30!?

7. Докажите, что среди чисел 2, 5, 8, 11, ... (то есть чисел вида $3m+2$, где $m=0, 1, 2, \dots$) бесконечно много простых.

§ 2. Количество делителей. Комбинаторное правило произведения

На рисунке 1 ниже выписаны все натуральные делители чисел 96 и 144. Мы видим, что все делители числа 96 разбиваются на пары *дополнительных* друг другу делителей (на рисунке 1 они соединены дугами), а у числа 144 один из делителей, 12, является дополнительным к самому себе, поскольку $144=12^2$. Из симметрии множества делителей следует такое утверждение:

> Если число n не является квадратом целого числа, то у него четное число делителей, а если является — то нечетное.

В самом деле, каждому делителю a числа n, меньшему $\sqrt{n}$, соответствует делитель n/a, больший $\sqrt{n}$. Поэтому делителей, отличных от $\sqrt{n}$, всегда четное число. Если же $n=k^2$, то к ним добавляется еще один делитель k.

Пусть $d(n)$ — *количество делителей* натурального числа n. Как показано выше, если n — полный квадрат, то $d(n)$ — нечетное число (например, $d(144)=15$), а если нет, то $d(n)$ — четное число (например, $d(96)=12$). Покажем теперь, как, зная разложение числа n на простые множители, находить значение $d(n)$.

Прежде всего, заметим, что при простом p всегда $d(p^\alpha)=\alpha+1$.

Действительно, по определению, простое число p имеет только два де-

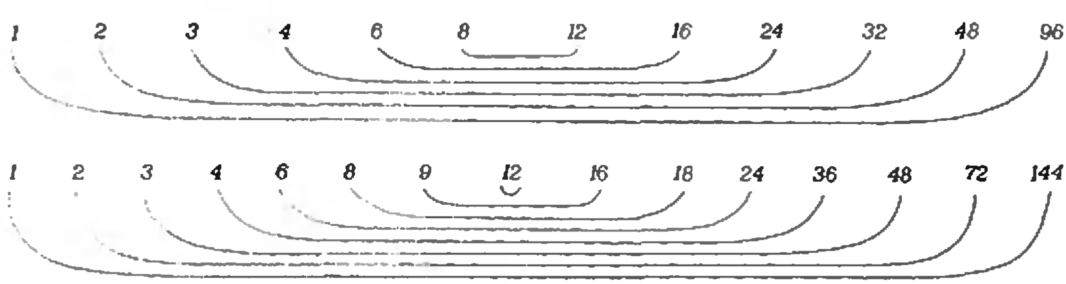


Рис. 1. Делители и дополнительные к ним

kvant.mccme.ru

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
3^0	1	2	2^2	2^3	2^4
3^1	3	$2\cdot 3$	$2^2 3$	$2^3 3$	$2^4\cdot 3$
3^2	3^2	$2\cdot 3^2$	$2^2 3^2$	$2^3 3^2$	$2^4 3^2$

Рис. 2. Правило произведения: делители $2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}$ числа $144=2^4\cdot 3^2 (0\leqslant\beta_1\leqslant 4, 0\leqslant\beta_2\leqslant 2)$ размещаются в табличке 5×3.

лителя: 1 и p, а, в силу следствия из основной теоремы арифметики, число p^α имеет $(\alpha+1)$ делителей: $1, p, p^2, \ldots, p^\alpha$ (считается, что $p^0=1$).

Рассмотрим теперь число n с двумя различными простыми множителями, например $n=144=2^4\cdot 3^2$. Все его делители имеют вид $2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}$, где β_1 может принимать любое из пяти целых значений от 0 до 4, β_2 — одно из трех значений 0, 1 или 2. Значит, всего разных пар $(\beta_1; \beta_2)$ может быть $3\cdot 5=15$, так что $d(144)=15$ (см. рис. 2). Здесь мы воспользовались полезным принципом подсчета.

> *Правило произведения.* Если элемент β_1 можно выбрать N_1 способами, а элемент β_2 — независимо от β_1 — N_2 способами, то всего можно составить $N_1\cdot N_2$ различных пар $(\beta_1; \beta_2)$. Вообще, если нужно составить набор $(\beta_1; \beta_2; \ldots, \beta_k)$ из k элементов, причем элемент β_1 можно выбрать N_1 способами, элемент β_2 — N_2 способами, ..., элемент β_k — N_k способами, то всего можно составить $N_1\cdot N_2\cdot\ldots\cdot N_k$ различных наборов $(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_k)$.

Это общее правило позволяет написать формулу для числа делителей любого $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$. В самом деле, согласно следствию из основной теоремы арифметики, любой делитель числа n имеет вид $p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$, где β_i принимает одно из (α_i+1) значений $0, 1, \ldots, \alpha_i$. Следовательно, количество разных наборов $(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_k)$, а значит, и различных делителей числа n, равно

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1). \quad (*)$$

Задачи

8. Найдите: а) $d(1000)$; б) $d(1350)$; в) $d(5040)$; г) $d(84^{19})$.

Решение задачи б). Ответ: 24. Так как $1350=2\cdot 3^3\cdot 5^2$, по формуле (*) получаем

$$d(2^1\cdot 3^3\cdot 5^2)=(1+1)(3+1)(2+1)=24.$$

9. Приведите пример числа, имеющего а) ровно 6 делителей; б) ровно 7 делителей.

10. Докажите, что число n, дающее при делении на 3 остаток 2, имеет поровну делителей вида $3l+1$ и $3s+2$ и не является полным квадратом.

11. Окружность разбита на 720 одинаковых дуг. Сколько существует различных (по числу сторон) правильных многоугольников с вершинами в точках разбиения?

12. Сколько у числа n четных делителей (напишите общую формулу)? Для каких чисел n количество таких делителей равно $\frac{1}{2}d(n)$?

13. В письменном столе имеется 9 ящиков. Сколькими способами можно разложить по ним пять разных книг?

Ответ: 9^5 способов. Решение. Первую книгу мы можем положить 9 способами в тот или иной ящик, и, независимо от этого выбора, есть 9 способов выбрать ящик для второй книги, и т. д. По правилу произведения, всего способов 9^5.

14. Сколько существует трехзначных чисел, у которых все цифры нечетные?

15. Сколько существует пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?

§ 3. Функция Эйлера. Включения и исключения

В § 2 мы познакомились с арифметической функцией $d(n)$. Еще чаще в теории чисел используется *функция Эйлера: $\varphi(n)$ — количество чисел, меньших числа n и взаимно простых с ним,* то есть таких чисел, которые не имеют с n общих делителей (кроме 1).

На рисунке 3 для примера выписаны числа от 1 до 18. Мы видим, что все взаимно простые с 18 числа разбиваются на пары $(a; 18-a)$. Такая симметрия будет для любого $n>2$: если число a взаимно просто с n, то $(n-a)$ также будет взаимно просто с n и не равно a. В самом деле, если бы $n-a$ и n имели общий делитель $p>1$, то их разность $n-(n-a)=a$ имела бы тот же делитель p, тем самым n и a не были бы взаимно просты.

Из этой симметрии $a\leftrightarrow(n-a)$ мы видим, что число $\varphi(n)$ всегда четно (при $n>2$).

Покажем теперь, как находить $\varphi(n)$, зная разложение числа n на

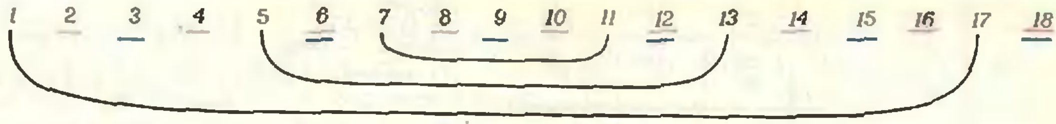


Рис. 3. Среди чисел от 1 до $18=2\cdot 3^2$ подчеркнуты все, кратные 2 (красным) и все, кратные 3 (синим). Подчеркнуты дважды (и синим, и красным) — числа, кратные 6. Не подчеркнутых — взаимно простых с 18 — осталось $\varphi(18)=18-18/2-18/3+18/6=$ $=18-9-6+3=6$. Они разбиваются на пары чисел, дающих в сумме 18.

простые множители. Прежде всего, заметим, что если p простое, то $\varphi(p)=p-1$, так как все числа 1, 2, ..., ..., $(p-1)$ взаимно просты с p и меньше его. Пусть $n=p^\alpha$, где p — простое число и $\alpha>1$. Тогда из n чисел, не превосходящих n, то есть из чисел 1, 2, 3, ..., n, мы должны исключить те, которые делятся на p. Таких чисел $\frac{n}{p}=\frac{p^\alpha}{p}=p^{\alpha-1}$, поэтому

$$\varphi(n)=n-\frac{n}{p}=n\left(1-\frac{1}{p}\right). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь числа $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ с двумя различными простыми множителями. Подсчет $\varphi(n)$ (для $n=18$ он проделан на рисунке 3) мы проиллюстрируем диаграммой на рисунке 4: квадрат изображает множество всех чисел от 1 до n, красный и голубой круги — это множества чисел, делящихся на p_1 и p_2 соответственно, пересечение кругов — множество чисел, делящихся на p_1p_2.

Числа, взаимно простые с n, изображаются заштрихованной частью квадрата. Для определения их числа мы должны исключить $N_1=n/p_1$ «красных чисел», $N_2=n/p_2$ «голубых» и прибавить $N_{12}=n/p_1p_2$ чисел, лежащих в пересечении кругов. Таким образом,

$$\varphi(n)=N-N_1-N_2+N_{12}=$$
$$=n-\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}+\frac{n}{p_1p_2}=$$
$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right). \quad (2)$$

Разобрать случай числа $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}$ с тремя различными множителями нам поможет рисунок 5: квадрат изображает множество чисел, не превосходящих n, а круги — множества чисел, делящихся на p_1, на p_2 и на p_3; тогда в кругах будет соответственно $N_1=\frac{n}{p_1}$, $N_2=\frac{n}{p_2}$ и $N_3=\frac{n}{p_3}$ чисел, в их попарных пересечениях — $N_{12}=\frac{n}{p_1p_2}$, $N_{13}=\frac{n}{p_1p_3}$ и $N_{23}=\frac{n}{p_2p_3}$ чисел, а в пересечении всех трех кругов — $N_{123}=\frac{n}{p_1p_2p_3}$ чисел (это числа, делящиеся одновременно на p_1, p_2 и p_3, то есть на $p_1p_2p_3$).

Мы должны подсчитать, сколько чисел содержится в квадрате, но не попадает ни в один из кругов. Если мы вычтем из n сумму $(N_1+N_2+N_3)$, то числа, попавшие ровно в два из трех кругов, мы вычтем два раза, а числа, попавшие во все три круга — даже три раза.

Теперь к разности $N-(N_1+N_2+N_3)$ добавим сумму $(N_{12}+N_{13}+N_{23})$. Тогда все числа, попадающие только в один или только в два круга, мы учтем правильно, и только числа,

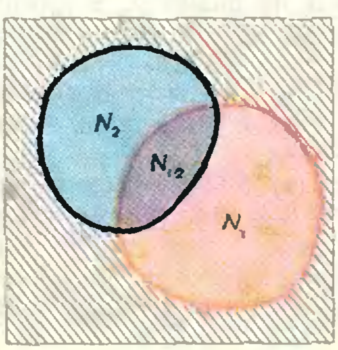
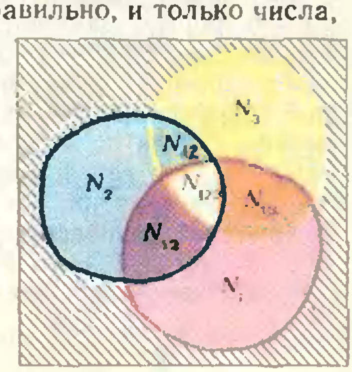


Рис. 4.

Рис. 5. Если всего в квадрате N элементов, то вне кругов их $N-N_1-N_2-N_3+N_{12}+N_{23}+N_{31}-N_{123}$.



kvant.mccme.ru

попавшие во все три круга одновременно — неправильно: их количество мы трижды вычли и вновь трижды прибавили. Придется из суммы $N-(N_1+N_2+N_3)+(N_{12}+N_{13}+N_{23})$ вычесть еще N_{123}. Теперь все числа, вошедшие в объединение трех кругов, мы учли по разу и пришли к такой формуле:

$$\varphi(n)=n-\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}-\frac{n}{p_3}+\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\frac{n}{p_2p_3}-\frac{n}{p_1p_2p_3}=$$
$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right). \quad (3)$$

Мы встретились здесь с частными случаями такого общего правила подсчета.

> *Правило включений и исключений.* Пусть задано множество A и выделено k его подмножеств. Количество элементов множества A, которые не входят ни в одно из выделенных подмножеств, подсчитывается так: надо из общего числа элементов A вычесть количества элементов всех k подмножеств, прибавить количества элементов всех их попарных пересечений, вычесть количества элементов всех тройных пересечений, прибавить количества элементов всех пересечений по четыре и т. д. вплоть до пересечения всех k подмножеств.

Применяя это правило к подсчету $\varphi(n)$, где

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k},$$

и используя алгебраическое тождество

$$1-x_1-x_2-\ldots-x_k+x_1x_2+$$
$$+x_1x_3+\ldots+x_{k-1}x_k-x_1x_2x_3-\ldots-$$
$$-x_{k-2}x_{k-1}x_k+\ldots+(-1)^kx_1x_2\ldots x_k=$$
$$=(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_k)$$

(его левая часть устроена как раз по правилу «включений и исключений»), можно получить общую формулу

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Заметим, что написанное выше алгебраическое тождество можно использовать и при доказательстве общего правила включений и исключений: положив некоторые j из k букв $x_1, \ldots, x_k$ равными 1, а остальные $(k-j)$ — нулю, мы получим (при $0<j\leqslant k$) в правой части 0, а левая часть покажет, что элементы пересечения ровно j подмножеств одинаковое число раз прибавляются и вычитаются.

В заключение отметим, что функция $\varphi(n)$ и функция $d(n)$ из предыдущего параграфа обладают таким важным свойством, которое в теории чисел называется мультипликативностью:

> Если a и b взаимно просты, то $\varphi(ab)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$ и $d(ab)=d(a)d(b)$

(Убедитесь в этом самостоятельно.)

Задачи

16. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 288?

17. Найдите а) $\varphi(96)$; б) $\varphi(540)$; в) $\varphi(1983)$.

18. Сколько существует чисел, не превосходящих 1000, которые а) делятся одновременно на 6 и на 15; б) делятся на 3, но не делятся на 7; в) делятся на 6 или на 15.

19. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

20. *Объединение множеств A и B состоит* из 25 элементов, пересечение — из 10 элементов. Сколько элементов в множестве A, если в B а) 15 элементов; б) 21 элемент; в) 10 элементов?

21. В декабре было 10 ясных и безветренных дней, 15 дней был ветер и 12 дней шел снег. Сколько дней была метель (и снег, и ветер)?

22. В группе из 25 студентов 12 изучают латынь, 10 — греческий и 9 — санскрит. Для каждых двух языков найдется ровно 5 студентов, изучающих оба этих языка. Сколько студентов изучает все три языка?

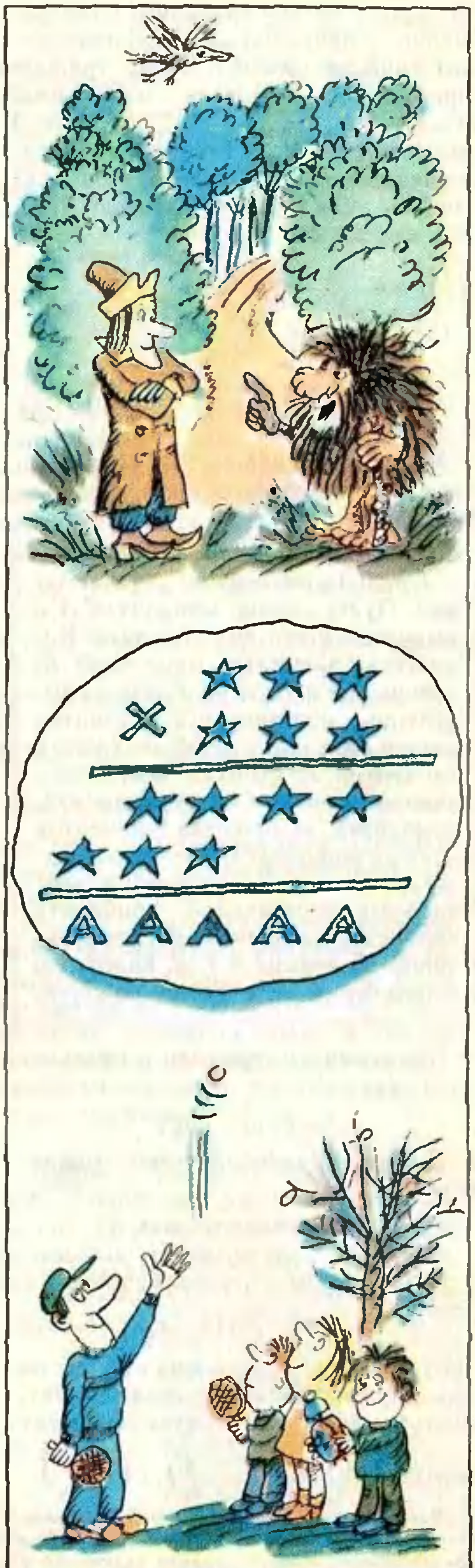
23. На каждой стороне треугольника ABC отмечены по 9 *точек, разбивающих ее на* 10 равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках (по одной на каждой стороне). Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна стороне треугольника ABC?

Литература

1. И. М. Виноградов. «Основы теории чисел» (М., «Наука», 1980).
2. И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. «Элементы комбинаторики» (М., «Наука», 1977).
3. Л. А. Калужнин. «Основная теорема арифметики» (М., «Наука», 1969).
4. О. Оре. «Приглашение в теорию чисел». (М., «Наука», Библиотечка «Квант», 1980).
5. Л. А. Басова, М. А. Шубин, Л. А. Эпштейн. «Лекции и задачи по математике» (М., «Просвещение», 1981).
6. Заочные математические олимпиады (М., «Наука», 1981).
7. Р. Курант, Г. Роббинс. «Что такое математика?» (М., «Просвещение», 1967).

kvant.mccme.ru

Квант для младших школьников



Задачи

1. Пошел было Иван-царевич куда глаза глядят искать Василису Прекрасную, похищенную Кащеем, как навстречу ему Леший. «Знаю,— говорит,— я дорогу в Кащеево царство, случалось, ходил туда. Шел я четыре дня и четыре ночи. Первые день и ночь — прямой дорогой на север, и прошел я треть пути. Потом повернул на запад и продирался лесом сутки и прошел вдвое меньше. И третьи сутки шел лесом, уже на юг, *и вышел на прямую* дорогу, ведущую на восток. Прошагал я по ней за сутки сто верст и попал в Кащеево царство. Ты ходок такой же резвый, как и я, иди, Иван-царевич, глядишь, на пятый день будешь в гостях у Кащея». «Нет,— отвечал Иван-царевич,— если все так, как ты говоришь, то уже завтра я увижу мою Василису Прекрасную». Прав ли он? Сколько верст прошел Леший и сколько думает пройти Иван-царевич?

2. Задумано трехзначное число, у которого с любым из чисел 543, 142 и 562 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое число задумано?

3. В этом числовом ребусе (см. рисунок) почти ничего неизвестно, однако он допускает лишь одно решение. Найдите его.

4. Шарик для игры в пинг-понг подбросили вверх. Что займет больше времени — подъем или спуск?

Эти задачи нам предложили
В. Журавлев, В. В. Произволов, В. Н. Денисенко, А. Н. Савин.

kvant.mccme.ru

Пирамидки и куб

Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

Мне захотелось поиграть с простой, но красивой головоломкой, которую я встретил в одной из статей Мартина Гарднера.

Я отправился в механическую мастерскую и попросил сделать мне по три детали согласно двум чертежам (рис. 1). Механик, к которому я обратился, чуть не обиделся, считая, что я его глупо разыгрываю. Но я и не думал шутить — чертежи были выполнены по всем правилам технического черчения (см. рис. 2.)

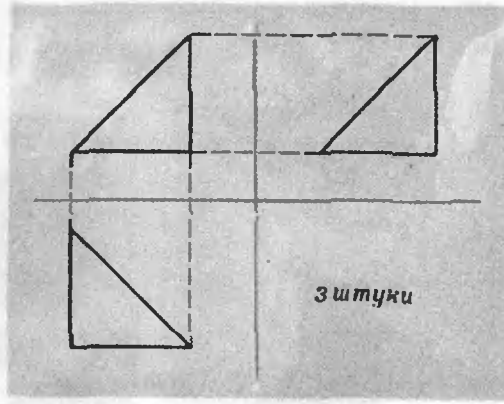
(Не заглядывая дальше, попробуйте нарисовать эти детали или представить, как они выглядят.)

Пытаясь облегчить задачу, я решил вместо шести деталей сделать только три по другому чертежу (рис. 3). Так как и этот чертеж оказалось нелегко расшифровать сразу, я не стал испытывать терпение механика и сам склеил модели из бумаги, по которым уже легко было бы сделать их и из металла. Но до этого так руки и не дошли: бумажные детали вполне годились для головоломки. (Вы можете изготовить эти детали, воспользовавшись развертками, показанными *на рисунке 4*).

Сами детали изображены на рисунке 5. Читатель разберется, по какому чертежу какая деталь склеена.

* * *

Сейчас можно поговорить и о головоломках. Из шести деталей первого типа или трех второго надо сло-



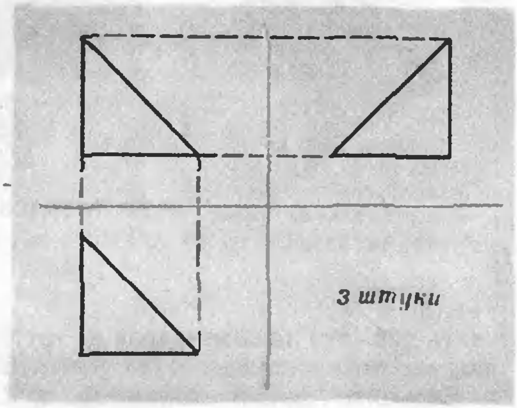


Рис. 1.

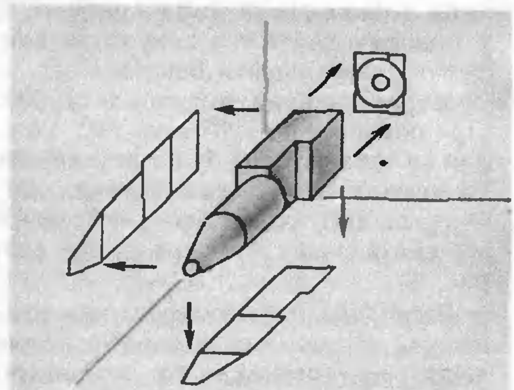


Рис. 2.

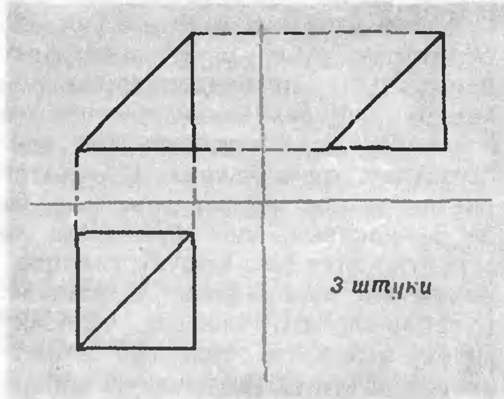


Рис. 3.

kvant.mccme.ru

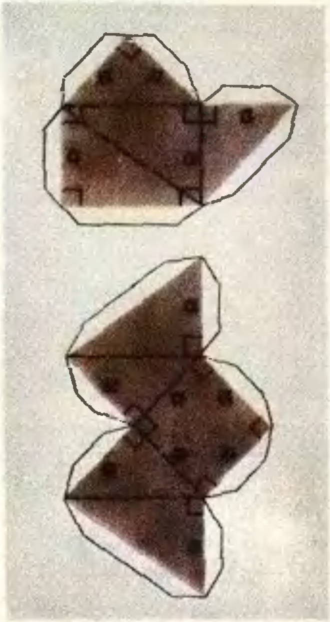


Рис. 4.

Рис. 5.

Рис. 6.

Рис. 7.

Рис. 8.

жить куб. Это на самом деле не трудно, но поучительно — попробуйте!

Возьмите двумя пальцами куб, сложенный из трех деталей второго типа, так, как показано на рисунке 6, и поворачивайте его аккуратно вокруг образовавшейся оси (эта ось — пространственная диагональ куба). При повороте на 120° и на 240° каждая из трех деталей будет переходить на место своего соседа. В таких случаях говорят, что фигура (куб) имеет *ось симметрии третьего порядка* (см. рис. 6).

Легко представить себе, как разделить яблоко на три одинаковые части — «третинки»; а вот такую «третинку» — одну треть куба — наверное вы еще не видели.

У этой «третинки» есть плоскость симметрии — ее можно разрезать плоскостью, перпендикулярной к квадратному основанию так, что это основание разделится на два конгруэнтных треугольника. Получатся две пирамидки — конгруэнтные, но не одинаковые; они *зеркальны*, то есть относятся друг к другу, как предмет и его изображение в зеркале.

Забавно, что обычно человеку трудно различить зеркально-симметричные объекты. Возьмите из набора рисунка 5 две пирамидки и, поставив их далеко друг от друга, спросите товарища, одинаковы они или зеркальны. Вы увидите, как этот вопрос для многих будет совсем не простым.

Можно проверить себя и так. У вас, наверное, есть игральный кубик. Всем известно, что сумма очков на противоположных гранях равна семи. Поэтому, посмотрев на одну грань, можно сразу сказать, сколько очков нанесено на противоположной грани. Но можно задать вопрос немного более трудный: сколько очков надо нанести на грань с вопросительным знаком (рис. 7)? Попробуйте догадаться и сравните со своим игральным кубиком.

* * *

Отвечая на последний вопрос, вы наверное заметили, что, в принципе, можно расставить очки двумя способами — зеркальными друг другу. Это значит, что существуют два типа кубиков — «правый» и «левый» (рис. 8). В играх обычно используют «левый» кубик — по крайней мере, говорят, что такой принят в игорных домах. В детских играх встречается и «правый» кубик — не все знают, что есть разница.

kvant.mccme.ru

задачник Кванта

Задачи

М781—М785; Ф793—Ф797

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 марта 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М781, М782» или «Ф793». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М781. Постройте прямую, параллельную стороне AC данного треугольника ABC и пересекающую его стороны AB и BC в таких точках D и E соответственно, что $|AD|=|BE|$.

Л. В. Ким

М782. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел равна 30 030, то их произведение не делится на 30 030.

С. В. Фомин

М783. а) При каком наибольшем n система неравенств

$$\begin{cases} 1<x<2, \\ 2<x^2<3, \\ 3<x^3<4, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ n<x^n<n+1 \end{cases}$$

имеет решения?

б) Для каких n существуют такие две прогрессии — арифметическая $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ и геометрическая $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, что

$$a_1<b_1<a_2<b_2<a_3<\ldots<a_n<b_n<a_{n+1}?$$

М784. Шарообразная планета движется по окружности вокруг звезды и вращается вокруг своей оси, причем ось суточного вращения наклонена к плоскости орбиты под углом α (для нашей Земли $\alpha=66{,}5^\circ$). Найдите зависимость продолжительности T самого короткого дня в году в данном пункте на поверхности планеты от географической широты φ этого пункта. (Угловая скорость вращения планеты по орбите много меньше угловой скорости вращения планеты вокруг ее оси.) Напишите формулу для функции $T=T(\varphi)$ и начертите примерный график.

А. П. Савин

М785. а) Про возрастающую последовательность положительных чисел $a(n)$, $n=1, 2, 3,\ldots$ известно, что для любого натурального числа $k>1$ существует число b_k такое, что $a(kn)\leqslant b_k a(n)$ при всех n. Докажите, что существуют

kvant.mccme.ru

положительные числа c и α, для которых $a(n) < cn^{\alpha}$ при всех $n > 1$.

Останется ли верным это утверждение, если в условии

б) слово «любого» заменить на «некоторого»?

в) не требовать, чтобы последовательность $a(n)$ была возрастающей?

М. У. Гафуров

Ф793. На вогнутую сферическую поверхность радиуса R с высоты $H=R/8$ вблизи оси симметрии падают (с нулевой начальной скоростью) маленькие шарики. Считая удары шариков о поверхность абсолютно упругими, показать, что после первого соударения каждый шарик попадает в низшую точку поверхности. Взаимные соударения шариков не учитывать.

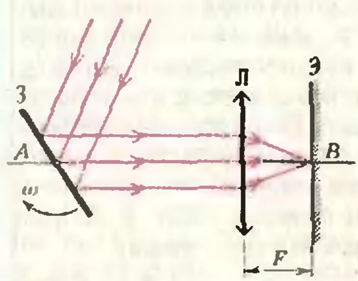
И. В. Кривченков

Ф794. Два одинаковых теплоизолированных калориметра высоты $h=75$ см заполнены на одну треть один — льдом, другой — водой при температуре $t=10$ °С. Воду из второго калориметра переливают в первый, и при этом калориметр оказывается заполненным на две трети. После того как температура в калориметре установилась, уровень заполнения его увеличился на $\Delta h=0{,}5$ см. Какова была начальная температура льда в калориметре? Плотность льда — $\varrho_л=9\cdot10^2$ кг/м^3, воды — $\varrho_в=10^3$ кг/м^3; удельная теплота плавления льда — $\lambda=3{,}4\times\times10^5$ Дж/кг; удельная теплоемкость льда — $c_л=2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг · К), воды — $c_в==4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг · К).

А. И Буздин

Ф795. Вода течет по длинному каналу с прямоугольным сечением, наклоненному к горизонту. Можно считать, что сила трения воды о дно и берега канала пропорциональна средней скорости потока и обратно пропорциональна его глубине. Во время паводка количество воды, протекающей через сечение канала за одну секунду, увеличивается вдвое. Как меняется при этом средняя скорость потока?

Г. Л. Коткин



Ф796. На главной оптической оси AB собирающей линзы с фокусным расстоянием F находится плоское зеркальце, вращающееся с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной оси AB (см. рисунок). На зеркальце падает параллельный пучок лучей, который после отражения фокусируется на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы. Найти скорость светового пятна на экране в момент, когда оно проходит фокус линзы.

Е. И. Пальчиков

kvant.mccme.ru

Ф797. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого зависит от напряжения U на конденсаторе по закону $\varepsilon=\alpha U$, где $\alpha=0{,}1$ В$^{-1}$. Параллельно этому «нелинейному» конденсатору (незаряженному) подключают обычный конденсатор, заряженный до разности потенциалов $U_0=60$ В. Каким будет напряжение на конденсаторах?

А. И. Буздин

Problems

M781—M785; P793—P797

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that March 31st 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication please send it us under sepa-

M781. Construct a line parallel to the side AC of triangle ABC intersecting ite sides AB and BC in the points D and E respectively so that $|AD|=|BE|$.

L. V. Kim

M782. Prove that if the sum of two numbers equals 30 030, then their product is not divisible by 30 030.

S. V. Fomin

M783. *a*) For what maximal n does the system of inequalities

$$\begin{gathered}1<x<2\\ 2<x^2<3\\ 3<x^3<4\\ \vdots\\ n<x^n<n+1\end{gathered}$$

have a solution?

b) For what n do there exist two progressions — an arithmetic one a_1, a_2, a_3, ... and a geometric one b_1, b_2, b_3, ... such that $a_1<b_1<a_2<b_2<a_3<...<a_n<b_n<a_{n+1}$?

M784. A spherical planet moves along a circle around a star and rotates about its own axis, inclined to the orbit plane by the angle α (for our Earth $\alpha=66°.5$). Find the dependence of the duration T of the shortest day of the year at a given point of the planet's surface on the point's latitude φ. (The angular velocity of the planet on orbit is much less than that of the planet about its axis.) Find an expression for the functoon $T=T(\varphi)$ and plot its graph approximately.

A. P. Savin

M785. For the increasing sequence of positive numbers $a(n)$, $n=1, 2, 3, ...$ it is known that for any natural number k there exists a number b_k such that $a(kn)\leqslant b_k a(n)$ for all n. Prove that thers exist positive numbers c and α for which $a(n)\leqslant cn^\alpha$ for all $n\geqslant 1$. Will this statement remain valid, if in the condition
a) the word "any" is repleced by "some"?
b) it is no longer assumed that the sequence $a(n)$ is increasing?

M. U. Gafurov

P793. Tiny balls fall from the height $H=R/8$ (with zero initial velocity) onto a concave spherical surface of radius R near its axis of symmetry. Assuming the collisions absolutely elastic, show that each ball will get to the lowest point of the surface on the first bounce. It may be assumed that the balls do not hit each other.

I. V. Krivchenkov

rate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

P794. Two identical thermoisolated calorimeters of height $h=75$ cm are filled to a third, one with ice, the other with water at temperature $t=10°C$. The water from the second calorimeter is poured into the first, filling it by two thirds. After the temperature in the calorimeter is established, the level of its contents increases by $\Delta h=0{,}5$ cm. What was the initial ice temperature in the first calorimeter? The density of ice is $\varrho_i=9\cdot 10^2$ kg/m^3, of water — $\varrho_w=10^3$ kg/m^3; the specific heat of ice melting is $\lambda=3{,}4\cdot 10^5$ J/(kg·K); the specific heat capacity of ice is $c_i=2{,}1\cdot 10^3$ J/(kg·K), of water — $c_w=4{,}2\cdot 10^3$ J/(kg·K).

A. I. Buzdin

P795. Water flows along a long inclined canal with rectangular section. It may be assumed that the force of friction of water against the bottom and the sides of the canal is proportional to the water's mean velocity and inversely proportional to depth. After the spring thaw, the amount of water flowing through the canal's section during one second doubles. How does the water's mean velocity change?

G. I. Kotkin

P796. A small flat mirror is placed on the main optical axis AB of a convergent lens of focal distance F and rotates with angular velocity ω about an axis perpendicular to AB (see figure on page 40). A parallel beam of light falls on the mirror and, after reflection, focuses on a screen situated in the lens focal plane. Find the velocity of the spotof light when it passes the focus of the lens.

E. I. Palchikov

P797. A flat capacitor is filled with a dielectric whose dielectric parmeability depends on the voltage U on the capacitor in accordance to the rule $\varepsilon=\alpha U$, where $\alpha=0.1\,V^{-1}$. An ordinary capacitor, charged te the difference of potential $U_0=60V$, is set up parallel to the "nonlinear" flat capacitor (uncharged). What will the voltage on the capacitors then be?

A. I. Buzdin

Решения задач

M759—M761, M763, M764; Ф778—Ф782

M759. *Внутри выпуклого четырехугольника, у которого сумма шести попарных расстояний между вершинами (то есть сумма длин всех сторон и диагоналей) равна S_1, расположен другой, для которого эта сумма равна S_2.*

а) Может ли величина S_2 быть больше S_1?

b) Докажите, что $S_2<4S_1/3$.

c) Докажите, что если внутри произвольного тетраэдра с суммой длин ребер S_1 расположен другой, для которого эта сумма равна S_2, то $S_2<4S_1/3$.

Для любых четырех точек A, B, C, D плоскости или пространства (не обязательно различных) обозначим через P_{ABCD} сумму длин всех шести отрезков, соединяющих попарно эти точки.

а) Ответ: может. Один из примеров показан на рисунке 1: первый четырехугольник $ABCD$ сильно вытянут вдоль диагонали AC, причем $|AB|=|AD|=|AC|=a$, второй — $ABCN$ — вписан в первый так, что его вершина N лежит на отрезке AD вблизи точки A. Ясно, что $S_2=P_{ABCN}>S_1=P_{ABCD}$. Более того, если устремить длины отрезков BD и AN к нулю, то S_2 будет стремиться к $4a$, а S_1 — к $3a$, поэтому $S_2:S_1$ будет стремиться к $4/3$.

b) Доказательство неравенства $S_2<4S_1/3$ для четырехугольников легко получить незначительным изменением приводимого дальше доказательства для тетраэдров*).

c) В основе решении лежит следующая

Лемма (рис. 2). *Если точка H лежит на отрезке H_1H_2, то для любых трех точек E, F, G $P_{EFGH}<P_{EFGH_1}$ или $P_{EFGH}<P_{EFGH_2}$.*

*) См. также статью В. М. Тихомирова «Об одной олимпиадной задаче (с. 22).

kvant.mccme.ru

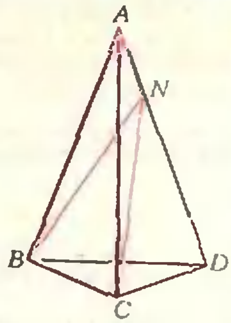


Рис. 1.

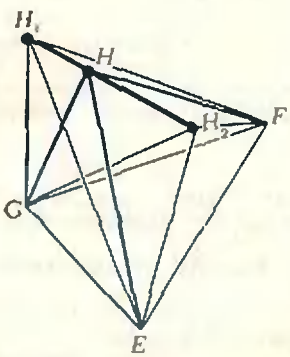


Рис. 2.

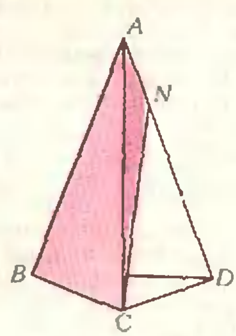


Рис. 3.

Доказательство. Пусть $\overline{H_1H}=\lambda\overline{H_1H_2}$. Тогда $\overline{EH}=\overline{EH_1}+\lambda\overline{H_1H_2}=\lambda\overline{EH_2}+(1-\lambda)\overline{EH_1}$, следовательно, $|EH|<\lambda|EH_2|+(1-\lambda)|EH_1|$.

Аналогично,

$$|FH|<\lambda|FH_2|+(1-\lambda)|FH_1|,$$
$$|GH|<\lambda|GH_2|+(1-\lambda)|GH_1|.$$

Складывая эти три неравенства с равенствами

$$|EF|=\lambda|EF|+(1-\lambda)|EF|,$$
$$|FG|=\lambda|FG|+(1-\lambda)|FG|,$$
$$|GE|=\lambda|GE|+(1-\lambda)|GE|,$$

получим*)

$$P_{EFGH}<\lambda P_{EFGH_2}+(1-\lambda)P_{EFGH_1}, \qquad (1)$$

а поскольку $0<\lambda<1$, отсюда вытекает утверждение леммы.

Докажем теперь, что *для любых четырех точек* K, L, M, N, лежащих внутри тетраэдра $ABCD$,

$$P_{KLMN}<\frac{4}{3}P_{ABCD}. \qquad (2)$$

Проведем через точку N отрезок N_1N_2 с концами на гранях $ABCD$. По лемме P_{KLMN} не превосходит P_{KLMN_1} или P_{KLMN_2}, поэтому можно считать, что точка N лежит на одной из граней тетраэдра $ABCD$. Но тогда, проводя через точку N отрезок с концами на ребрах этой грани, мы сведем задачу к случаю, когда N лежит на одном из ребер тетраэдра. Наконец, применяя в этом случае лемму к точке N и концам содержащего ее ребра, мы получаем, что (2) достаточно проверить для четверок точек K, L, M, N, в которых N — одна из вершин тетраэдра $ABCD$.

Применяя такое же рассуждение последовательно к вершинам K, L, M, заключаем, что неравенство (2) можно доказывать только для точек K, L, M, N, расположенных в вершинах тетраэдра $ABCD$. Если все эти точки различны, то $P_{KLMN}=P_{ABCD}<\frac{4}{3}P_{ABCD}$.

Допустим теперь, что две из точек K, L, M, N совпадают, например, $K=L=A$. Если совпадают и две другие точки, скажем, $M=N=B$, то, очевидно,

$$P_{KLMN}=4|AB|=\frac{4}{3}\cdot3|AB|<\frac{4}{3}(|AB|+(|AC|+|CB|)+(|AD|+|DB|))<\frac{4}{3}P_{ABCD}. \qquad (3)$$

Если точки M и N различны, $M=B$, $N=C$, то $P_{KLMN}=2|AB|+2|AC|+|BC|$. Пользуясь неравенствами $|AB|<|AD|+|DB|$, $|AC|<|AD|+|DC|$ и $|AD|<\frac{1}{3}(|AD|+(|AC|+|CD|)+(|AB|+|BD|))<\frac{1}{3}P_{ABCD}$, получим

$$P_{KLMN}<|AB|+|AD|+|DB|+|AC|+|AD|+|DC|+|BC|=P_{ABCD}+|AD|<\frac{4}{3}P_{ABCD}.$$

Наконец, возможен случай, когда совпадают три вершины внутреннего тетраэдра, скажем, $K=L=M=A$, $N=B$. Тогда $P_{KLMN}=3|AB|<4|AB|$; далее см. (3).

Коэффициент 4/3 в условии уменьшить нельзя. Для доказательства вернемся к рисунку 1. Если чуть-чуть приподнять точку C над плоскостью ABD, мы получим два тетраэдра — $ABCN$ и $ABCD$ — первый внутри второго (рис. 3). При этом, как мы показали в п. а), отношение $P_{ABCN}:P_{ABCD}$ можно сделать сколь угодно близким к 4/3.

П. Б. Гусятников

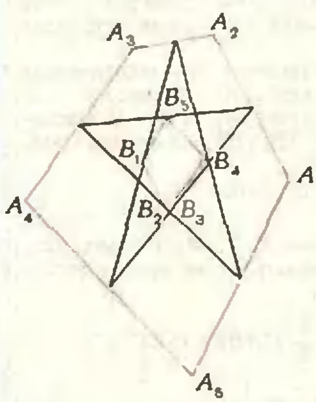
kvant.mccme.ru

M760. *С замкнутой ломаной $A_1A_2...A_m$, где m нечетно, проделывается такая операция: середины ее звеньев соединяются m отрезками через одну (середина A_1A_2 — с серединой A_3A_4, A_2A_3 — с A_4A_5, ..., $A_{m-1}A_m$ — с A_1A_2, A_mA_1 — с A_2A_3). С полученной ломаной вновь проделывается эта же операция, и т. д. Докажите, что из любой m-звенной ломаной*

а) при $m=5$ — через два шага,

б) при $m=7$ — через три шага,

в) при любом нечетном m — через некоторое (зависящее от m) число шагов получится ломаная, подобная (даже гомотетичная) первоначальной.*



Фиксируем произвольную точку O (ее положение мы уточним в процессе решения), тогда любую точку A можно задавать вектором $\overrightarrow{OA}$ — вектором точки A. Если обозначить векторы вершин данной ломаной $Л$ через $\bar{a}_1=\overrightarrow{OA}_1$, ..., $\bar{a}_m=\overrightarrow{OA}_m$, то векторы вершин ломаной $Л_1$, которая получается из $Л$ в результате указанной в задаче операции, равны

$$\frac{1}{2}(\bar{a}_1+\bar{a}_2),\ \frac{1}{2}(\bar{a}_3+\bar{a}_4),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \frac{1}{2}(\bar{a}_m+\bar{a}_1),\ \frac{1}{2}(\bar{a}_2+\bar{a}_3),\ \ldots,\ \frac{1}{2}(\bar{a}_{m-1}+\bar{a}_m),$$

поскольку вектор середины отрезка равен полусумме векторов его концов. Аналогично, векторы вершин следующей ломаной равны

$$\frac{1}{4}(\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\bar{a}_4),\ \frac{1}{4}(\bar{a}_5+\bar{a}_6+\bar{a}_7+\bar{a}_8),\ \ldots,$$
$$\ldots,\ \frac{1}{4}(\bar{a}_{m-3}+\bar{a}_{m-2}+\bar{a}_{m-1}+\bar{a}_m).$$

Вообще, для нахождения векторов вершин ломаной $Л_k$ нужно 2^k раз записать последовательность векторов вершин ломаной $Л$:

$$\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots\ \bar{a}_m,\ \bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_m,\ \ldots,\ \bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_m,$$

сложить первые 2^k векторов этой строки, следующие 2^k векторов и так далее, а затем каждую из полученных m сумм разделить на 2^k.

а) Пользуясь выведенным правилом, найдем векторы вершин ломаной $Л_2$ для $m=5$:

$$\frac{1}{4}(\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\bar{a}_4),\ \frac{1}{4}(\bar{a}_5+\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \frac{1}{4}(\bar{a}_2+\bar{a}_3+\bar{a}_4+\bar{a}_5)$$

или, полагая $\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\bar{a}_4+\bar{a}_5=\bar{a}$:

$$\frac{1}{4}(\bar{a}-\bar{a}_5),\ \frac{1}{4}(\bar{a}-\bar{a}_4),\ \frac{1}{4}(\bar{a}-\bar{a}_3),\ \frac{1}{4}(\bar{a}-\bar{a}_2),\ \frac{1}{4}(\bar{a}-\bar{a}_1).$$

Теперь заметим, что точку O всегда можно выбрать так, чтобы сумма $\bar{a}$ векторов вершин ломаной $Л$ равнялась $\bar{0}$ (см. конец решения). В этом случае векторы вершин ломаной $Л_2$ будут равны $-\frac{1}{4}\bar{a}_5$, $-\frac{1}{4}\bar{a}_4$, $-\frac{1}{4}\bar{a}_3$, $-\frac{1}{4}\bar{a}_2$, $-\frac{1}{4}\bar{a}_1$, поэтому сами вершины будут гомотетичны вершинам ломаной $Л$ относительно точки O с коэффициентом $-1/4$ (см. рисунок): 1-я вершина ломаной $Л_2$ соответствует 5-й вершине A_5 ломаной $Л$, 2-я — соответствует A_4, 3-я — A_3, 4-я — A_2 и 5-я — A_1. При этом и порядок соединения вершин $Л_2$ будет таким же, как у соответствующих вершин $Л$, хотя направление их обхода будет противоположным.

б), в) Всегда можно выбрать такое k, чтобы число 2^k-1 делилось на нечетное число m. (В частности, в задаче б) $m=7$, а $k=3$). Действительно, среди чисел 1, 2, 2^2, ... обязательно найдутся два, 2^l и 2^n ($l<n$), которые дают одинаковые остатки при делении на m. Их разность $2^n-2^l=2^l(2^{n-l}-1)$ делится на m без остатка. А так как m нечетно, отсюда вытекает, что при $k=n-l$ число 2^k-1 делится на m; пусть $2^k-1=mp$.

Тогда $2^k=mp+1$, и согласно нашему правилу нахождения векторов вершин ломаной $Л_k$ они представляются в виде

$$\frac{1}{2^k}(p\bar{a}+\bar{a}_1),\ \frac{1}{2^k}(p\bar{a}+\bar{a}_2),\ \ldots,\ \frac{1}{2^k}(p\bar{a}+\bar{a}_m),$$

где $\bar{a}=\bar{a}_1+\ldots+\bar{a}_m$. Если точка O выбрана так, что $\bar{a}=\overrightarrow{OA}_1+\ldots+\overrightarrow{OA}_m=\bar{0}$, то векторы вершин ломаной $Л_k$ равны $2^{-k}\bar{a}_1$, ..., $2^{-k}\bar{a}_m$, и поэтому она гомотетична ломаной $Л$ с центром гомотетии O и коэффициентом 2^{-k}.

kvant.mccme.ru

Остается объяснить, как найти нужную нам точку O — центр гомотетии. Сумму векторов вершин можно записать в виде

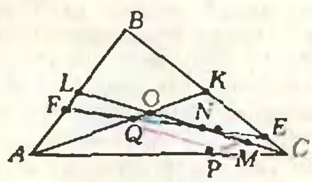
$$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_m}=\overrightarrow{OA_1}+(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2})+\ldots$$

$$\ldots+(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_m})=m\cdot\overrightarrow{OA_1}+(\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_1A_m}),$$

поэтому, если $\overrightarrow{A_1O}=\frac{1}{m}(\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_1A_m})$, то $\vec{a}=\vec{0}$. (Эта точка O — центр тяжести одинаковых масс, помещенных в точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$).

А. В. Келарев, Н. Б. Васильев, А. Н. Земляков

М761. *Через произвольную точку P на стороне AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно (см. рисунок).*



Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три одинаковые части.

◆

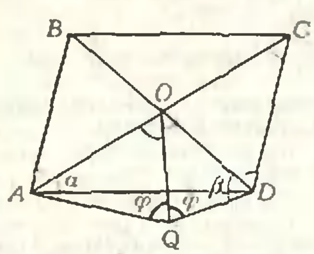
Из подобий $\Delta EMC\sim\Delta OKC$ и $\Delta PMC\sim\Delta AOC$ следует, что $\frac{|ME|}{|OK|}=\frac{|CM|}{|OC|}=\frac{|PM|}{|AO|}$. Поэтому $\frac{|ME|}{|PM|}=\frac{|OK|}{|OA|}=\frac{1}{2}$.

Кроме того, $\Delta NEM\sim\Delta EFP$, и поэтому $\frac{|NE|}{|EF|}=\frac{|ME|}{|PE|}=\frac{1}{3}$.

Следовательно, $|EN|=\frac{1}{3}|EF|$. Так же доказывается, что $|FQ|=\frac{1}{3}|EF|$. Поэтому $|FQ|=|QN|=|NE|$.

А. А. Егоров

М763*. *Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. Прямая, симметричная прямой AB относительно диагонали AC, пересекает в точке Q прямую, симметричную прямой DC относительно диагонали DB. Найдите отношение $|QA|:|QD|$, если известно отношение $|AC|:|BD|=k$.*



◆

Ответ: $|QA|:|QD|=k^2$. Пусть O — точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Докажем, что треугольники AQO и OQD подобны (см. рисунок).

Прежде всего, заметим, что QO — биссектриса угла AQD. Действительно, точка O равноудалена от прямых AQ и AB (так как AO — биссектриса угла QAB), от прямых DQ и DC (так как DO — биссектриса угла QDC) и от прямых AB и DC (как центр параллелограмма). Поэтому она равноудалена от прямых AQ и DQ, то есть лежит на биссектрисе образуемого ими угла.

Положим $\widehat{AQO}=\widehat{OQD}=\varphi$, $\widehat{QAO}=\alpha$, $\widehat{QDO}=\beta$. Тогда $\widehat{AOD}=2\pi-\alpha-\beta-2\varphi$. В то же время AOD — внешний угол треугольника ODC, в котором $\widehat{OCD}=\widehat{OAB}=\alpha$, $\widehat{ODC}=\beta$ (см. рисунок). Следовательно, $\widehat{AOD}=\alpha+\beta$, то есть $2\pi-\alpha-\beta-2\varphi=\alpha+\beta$. Отсюда вытекает, что $\alpha+\beta+\varphi=\pi$ и, значит, $\widehat{AOQ}=\pi-\alpha-\varphi=\beta=\widehat{ODQ}$. Поскольку треугольники AQO и OQD имеют соответственно равные углы, они подобны с коэффициентом подобия $|AO|:|OD|=|AC|:|BD|=k$. Таким образом,

$$\frac{|QA|}{|QD|}=\frac{|QA|}{|QO|}\cdot\frac{|QO|}{|QD|}=k^2.$$

Замечание. Стоит пояснить происхождение этой, как будто довольно искусственной, задачи. Дело в том, что Q — это неподвижная точка преобразования подобия (одного из двух возможных), которое переводит точку A в O, а O — в D. Его можно представить как композицию поворота вокруг точки Q на угол φ (на нашем рисунке — по часовой стрелке) и гомотетии H_Q^k. Преобразования этого типа называют *поворотными гомотетиями* или *спиральными подобиями*. Таким образом, построение, описанное в условии задачи, позволяет найти спиральное подобие F, если заданы точки A, $F(A)$ $(=O)$ и $F(F(A))$ $(=D)$. Второе преобразование подобия, переводящее точки A и O в O

и D соответственно, является композицией осевой симметрии и гомотетии с центром на ее оси. Подумайте, как построить его неподвижную точку.*).

В. Н. Дубровский

◆

М764*. *Докажите, что каждое из уравнений а) $x^2+y^3=z^5$; б) $x^2+y^3+z^5=t^7$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.*

а) Попробуем искать решения среди степеней одного и того же натурального числа a: $x=a^k$, $y=a^e$, $z=a^m$ (k, e, m — натуральные).

Подстановка таких x, y, z в уравнение дает равенство $a^{2k}+a^{3e}=a^{5m}$. Легко видеть, что при $2k\neq 3e$ такое равенство невозможно. Поэтому $2a^{2k}=a^{5m}$. Отсюда следует, что $a=2$.

Положим $x=2^{3n}$, $y=2^{2n}$, при этом $x^2+y^3=2^{6n+1}$, и, следовательно, число $6n+1$ должно делиться на 5.

А так как $6n+1$ делится на 5 только при $n=5s+4$ ($s\geqslant 0$), получаем бесконечную серию решений:

$$x=2^{15s+12},\ y=2^{10s+8},\ z=2^{6s+5},\ s\in Z,\ s\geqslant 0.$$

б) Решается аналогично *а*). Нужно искать решения, для которых $x=3^{15n}$, $y=3^{10n}$, $z=3^{6n}$. После подстановки в уравнение получим $3^{30n+1}=t^7$, но $30n+1$ делится на 7 при $n=7s+3$, $s\geqslant 0$, $s\in Z$. Нами получена бесконечная серия решений $x=3^{105s+45}$; $y=3^{70s+30}$; $z=3^{42s+18}$; $t=3^{30s+13}$.

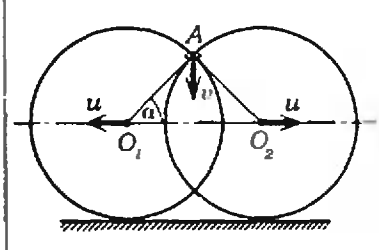
Нетрудно заметить, что вообще уравнение $x_1^{a_1}+x_2^{a_2}+\ldots+x_n^{a_n}=y^b$ имеет бесконечное число решений в целых числах, если наименьшее общее кратное M чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ взаимно просто с b. Так же как и в пунктах *а*) и *б*), решения можно искать в виде степеней числа n.

Положим $x_1=n^{\frac{M}{a_1}t}$, ..., $x_n=n^{\frac{M}{a_n}t}$, где $t\in N$. После подстановки x_1, x_2, ..., x_n в уравнение, получим равенство $n^{Mt+1}=y^b$, а так как M и b взаимно простые, существует бесконечное количество t, при которых $Mt+1$ делится на b.

О. В. Мазуров

◆

Ф778. *Колечко массы m, свободно скрепляющее два тонких обруча массы M, начинает соскальзывать вниз; обручи при этом разъезжаются в разные стороны по шероховатой горизонтальной поверхности. Определить ускорение колечка в начальный момент времени, если угол AO_1O_2 (см. рисунок) равен α. Трение между колечком и обручами отсутствует.*



Пусть за малый промежуток времени Δt после начала движения системы колечко опустилось на расстояние Δx от точки A и приобрело скорость v. Скорость поступательного движения обручей в этот момент должна быть равна $u=v\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (Δt настолько мало, что угол α практически не изменился). Следовательно, такова же линейная скорость всех точек обручей. Согласно закону сохранения энергии,

$$mg\cdot\Delta x=2Mu^2+m\frac{v^2}{2}=2Mv^2\mathrm{tg}^2\alpha+m\frac{v^2}{2}$$

(Mu^2 — полная кинетическая энергия каждого обруча в данный момент). Из этого равенства находим

$$\frac{v^2}{2\cdot\Delta x}=\frac{mg}{4M\,\mathrm{tg}^2\alpha+m}=g\frac{1}{1+4\dfrac{M}{m}\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

При $\Delta x\to 0$ можно считать, что $v^2=2a\cdot\Delta x$, где a — мгновенное ускорение колечка в начале движения. Следовательно,

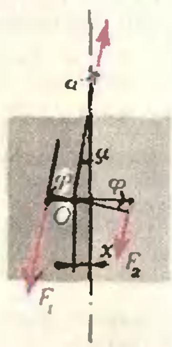
$$a=g\frac{1}{1+4\dfrac{M}{m}\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

С. С. Кротов

*) Подробнее о преобразованиях подобия и их применениях в геометрии можно прочитать в следующих книгах: И. М. Яглом «Геометрические преобразования», т. I, (М., Гостехтеориздат, 1955) и Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер «Новые встречи с геометрией» (М., «Наука», 1978).

kvant.mccme.ru

Ф779. *Квадрат, состоящий из двух половинок, отношение масс которых равно двум, находится на шероховатой поверхности. Под каким углом α к границе раздела половинок необходимо тянуть веревку в горизонтальной плоскости, чтобы квадрат двигался поступательно? Точка приложения силы лежит в точке пересечения стороны квадрата и границы раздела.*



Пусть квадрат движется поступательно и при этом нить составляет угол α с прямой AB (см. рисунок). Сила трения, действующая на левую половину квадрата, направлена против движения квадрата и проходит через центр масс левой половины (мы считаем, что сила нормального давления равномерно распределена по поверхности соприкосновения квадрата с горизонтальной плоскостью). Абсолютное значение этой силы равно

$$F_1 = \mu m_1 g,$$

где μ — коэффициент трения, m_1 — масса левой половины квадрата. Сила трения, действующая на правую половину квадрата, проходит через центр масс этой половины, направлена против движения квадрата, то есть параллельно силе $\vec{F}_1$, и равна по абсолютной величине

$$F_2 = \mu m_2 g,$$

где m_2 — масса правой половины квадрата. Результирующая сил трения равна по абсолютной величине $\mu(m_1+m_2)g$ и приложена к центру масс всего квадрата. Следовательно, линия действия силы, с которой тянут за веревку, должна проходить через центр масс квадрата (точка O на рисунке), то есть веревка должна составлять с линией AB угол α такой, что (см. рисунок)

$$\operatorname{tg}\alpha = x/a.$$

Величину x находим из условия равенства моментов сил F_1 и F_2 относительно центра масс квадрата:

$$\mu m_1 g\left(\frac{a}{2} - x\right)\cos\varphi = \mu m_2 g\left(\frac{a}{2} + x\right)\cos\varphi,$$

откуда

$$x = \frac{a(m_1 - m_2)}{2(m_1 + m_2)}.$$

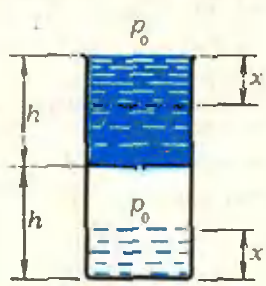
Учитывая, что $m_1/m_2 = 2$, находим $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{a} = \frac{1}{6}.$$

Э. С. Алиев

◆

Ф780. *Цилиндрический сосуд высоты $2h$, поровну разделенный перегородкой, содержит в верхней части воду (ее плотность ϱ), в нижней — воздух при атмосферном давлении p_0. В перегородке открывается небольшое отверстие, так что вода начинает протекать в нижнюю часть сосуда. Какой толщины будет слой воды в нижней части сосуда, когда воздух начнет проходить из отверстия вверх? Температура постоянна. Ускорение силы тяжести равно g.*



Воздух из нижней части сосуда начнет проходить через отверстие вверх, когда давление его превысит гидростатическое давление воды на уровне отверстия, то есть при давлении

$$p = p_0 + \varrho g(h - x),$$

где x — понижение уровня воды в верхней части сосуда и, соответственно, толщина слоя воды в нижней части сосуда. Так как температура воздуха не меняется, согласно закону Бойля—Мариотта

$$p_0 hS = p(h - x)S,$$

где S — площадь дна сосуда.

Таким образом,

$$p_0(h - x) + \varrho g(h - x)^2 = p_0 h,$$

откуда

$$\varrho g x^2 - (2\varrho g h + p_0)x + \varrho g h^2 = 0.$$

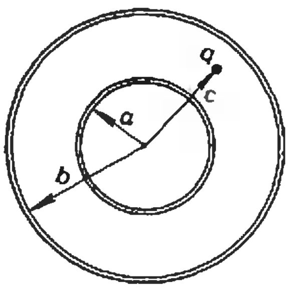
Решая это уравнение, находим x:

$$x = h + \frac{p_0}{2\varrho g}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\varrho g h}{p_0}}\right).$$

(Решение $x = h + \dfrac{p_0}{2\varrho g}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4\varrho g h}{p_0}}\right)$ не подходит, так как заведомо $x < h$.)

В. П. Бородин

Ф781. *Между двумя незаряженными металлическими концентрическими сферами радиусов a и b находится точечный заряд q на расстоянии c от центра сфер. Какой заряд протечет по тонкому проводнику, если им замкнуть сферы?*



Вначале малая сфера была не заряжена. После замыкания сфер на нее перетечет некоторый заряд, который распределится по ее поверхности неравномерно. Обозначим величину этого заряда q_1. При этом на внутренней поверхности большой сферы появится заряд q_2, распределенный по этой поверхности тоже неравномерно. Силовые линии поля, создаваемого зарядом q, заканчиваются на малой сфере и на внутренней поверхности большой сферы. Следовательно, заряд q_2 должен быть равен

$$q_2 = -(q+q_1).$$

Поскольку эти силовые линии не проникают наружу через толщу большой сферы, заряд на внешней поверхности этой сферы распределен равномерно и не создает поля внутри сферы. Значит, приравнивая потенциалы внутренней и наружной сфер (сферы соединены проводником), этот заряд можно не учитывать, а потенциал внешней сферы принять равным нулю. Тогда потенциал в центре сфер также будет равен нулю (внутри малой сферы поля нет и потенциал малой сферы равен потенциалу в центре сфер).

Таким образом,

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} = 0.$$

Подставив $q_2 = -(q+q_1)$, из этого условия найдем q_1:

$$q_1 = -q\,\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}.$$

Ясно, что величина заряда q_1 не зависит от начальных зарядов сфер и определяется только величиной q и размерами системы. Весь «лишний» заряд расположится на внешней поверхности большой сферы, определяя потенциал проводника в целом. Интересно отметить, что при движении заряда q (при изменении c) величина q_1 (а значит, и q_2, и $q_{внеш}$) может меняться; следовательно, может меняться и поле снаружи. Поле же внутри такого сферического «экрана» не зависит от величины и расположения внешних зарядов.

В. И. Комов

◆

Ф782. *Конденсатор зарядили до напряжения $U_0=100$ В и подключили к нему резистор. При этом за некоторый интервал времени выделилась в виде тепла энергия $W_1=1$ Дж, а еще за такой же интервал — энергия $W_2=0{,}3$ Дж. Определить емкость конденсатора.*

Пусть к концу первого интервала напряжение на конденсаторе уменьшилось до U_1. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{CU_0^2}{2} = W_1 + \frac{CU_1^2}{2},$$

откуда

$$U_1 = U_0\sqrt{1-\frac{2W_1}{CU_0^2}}.$$

Ясно, что если бы начальное напряжение на конденсаторе было в n раз меньше чем U_0, то за тот же интервал времени на резисторе выделилось бы тепла в n^2 раз меньше чем W_1. Это означает, что

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{U_1^2}{U_0^2}$$

(U_1 — начальное напряжение для следующего интервала времени). Подставляя в это выражение полученное ранее значение U_1, находим C:

$$C = \frac{2W_1}{U_0^2\left(1-\frac{W_2}{W_1}\right)} \approx 29\ \text{мкФ}.$$

А. Р. Зильберман

kvant.mccme.ru

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Поэзия? Математика?

Э. П. Казанджан

Из всех наук математика считается самой абстрактной. Справедливо ли это? Действительно, многие ее понятия, методы, теоремы кажутся какими-то неестественными, придуманными. Именно кажутся. Ведь источник всех математических выдумок — сама жизнь. Наше бытие во многом математично, и сознание наше насыщено математикой, да ее ощущают и бессознательно. Уж, кажется, что может быть дальше от математики, чем поэзия? Но, внимательно вглядываясь в некоторые стихотворные строчки, можно не без удивления обнаружить, что их авторы — весьма грамотные математики, хотя бы потенциально, и они очень тонко чувствуют многие важнейшие понятия математики. Примеров много.

Б. Заходер. Попугай

— Если сможешь, угадай,
Что нам скажет попугай?
— То и скажет, полагаю,
Что вдолбили попугаю!

Впечатление такое, что эти стихи сочинены специально с целью дать иллюстрацию к понятию тождественного отображения.

С. Маршак

Вот дом,
Который построил Джек.
А вот пшеница,
Которая в темном чулане хранится
В доме,
Который построил Джек
....

Неплохой пример того, что подмножество подмножества данного множества содержится в этом множестве.

Б. Заходер. Джонни (вольный пер. с англ.)

Жил на свете Джонни.
Знаете его?
Не было у Джонни
Ровно ничего!
Нечего покушать,
Нечего надеть,
Не к чему стремиться,
Не о чем жалеть,
Нечего бояться,
Нечего терять...
Весело живется,
Нечего сказать!

Ведь это же нулевой вектор — все координаты равны нулю.

С. Маршак. Три Мудреца
(вольный пер. с англ.)

Три мудреца в одном тазу
Пустились по морю в грозу.
Будь попрочнее старый таз,
Длиннее был бы мой рассказ.

П. Вяземский

Чтоб более меня читали,
Я стану менее писать.

Наглядные примеры прямой и обратной пропорциональности.

М. Лермонтов

Как я хотел себя уверить,
Что не люблю ее, хотел
Неизмеримое измерить,
Любви безбрежной дать предел.

Как видно, Лермонтов не только знал, что не всякая функция имеет предел, но и нашел конкретный пример. Несколько парадоксальные, но, в принципе, верные примеры на эту тему имеются у К. Бальмонта и С. Смирнова.

К. Бальмонт

Снежная равнина без предела.
По краям все лес, и лес, и лес.

С. Смирнов. Наивная комета

— Я выше всех! —
подумала Комета.
И даже где-то
Подчеркнула это.
А на нее
с улыбкой
поглядела
Вселенная,
Которой нет предела.

Следующую эпитафию с некоторыми вариациями можно давать как пример прямой и обратной теорем.

С. Маршак (вольный пер. с англ.)

Здесь я покоюсь, Джимми Хогг,
Авось грехи простит мне бог,
Как я бы сделал, будь я бог,
А он покойный Джимми Хогг!

Стандартные приемы программирования

Урок 4. Синхронная и асинхронная обработка массивов

Если вам не удалось найти общность и различия в условиях задач, попробуйте ответить на вопрос: с какими элементами массивов будет идти работа, скажем, на 5-м шаге работы алгоритма (шагом считаем обработку одного элемента в любом массиве)? В 3-й и 4-й задаче ответ на этот вопрос прост: на 5-м шаге обрабатываются 5-е элементы в массивах A и B (3-я задача), 5-й элемент в массиве B и 10-й элемент в массиве A (4-я задача). Что же касается первых двух задач, то на 5-м шаге обрабатывается 5-й элемент того массива, по которому мы отсчитываем шаги, но про другие массивы мы ничего сказать не можем (за исключением того, что обрабатывается элемент с бо́льшим, чем в данном массиве, или меньшим номером). Это и есть ключевой момент: в задачах 3 и 4 массивы обрабатываются **синхронно** (то есть имеется явная, *аналитически выражаемая* связь между номерами обрабатываемых элементов в разных массивах; в задачах 1 и 2 между номерами обрабатываемых элементов в каждой паре массивов нельзя указать связь, не зависящую от конкретных массивов, которую можно *выразить формулой, связывающей только эти номера и какие-то константы*. Поэтому можно сказать, что в задачах 1 и 2 массивы обрабатываются **асинхронно**.

Теперь рассмотрим приведенные решения. Все решения правильны, но не все одинаково хороши. Задачи 3 и 4, по-видимому, не вызвали трудностей, однако решение 4б не самое лучшее по краткости и легкости его понимания. Поскольку в задачах 3 и 4 массивы обрабатываются синхронно,

достаточно иметь один индекс для обработки всех синхронно обрабатываемых массивов.

В 1-й и 2-й задачах массивы обрабатываются асинхронно, поэтому попытка обойтись одним индексом заранее обречена на неудачу:

при асинхронной обработке массивов для каждого из асинхронно обрабатываемых массивов необходим свой индекс (см. решения 1а, 1б, 2а, 2б).

В принципе, конечно, можно вместо индекса ввести, например, счетчики, фиксирующие отставание одного индекса от другого (см. решение 2в), *но это не упрощает программу, а только нарушает единообразие обработки массивов.*

Решение

(а)

Задача 1 (Слияние упорядоченных массивов)

```
i:=1; j:=1;
for k:=1 to m+n do
begin if (i<=n)AND(j<=m)
       then if a[i]<b[j]
            then begin
                   c[k]:=a[i]; i:=i+1
                 end
            else begin
                   c[k]:=b[j]; j:=j+1
                 end
       else if i<=n
            then begin
                   c[k]:=a[i]; i:=i+1
                 end
            else begin
                   c[k]:=b[j]; j:=j+1
                 end
end;
```

Задача 2 (Сортировка чисел)

```
j:=1; k:=1;
for i:=1 to n do
begin
  if a[i]>0 then begin пол[j]:=a[i];
                   j:=j+1 end;
  if a[i]<0 then begin отр[k]:=a[i];
                   k:=k+1 end;
end;
пол[j]:=0; отр[k]:=0;
```

Задача 3 (Скалярное произведение)

```
S:=0; for i:=1 to n do
      s:=s+a[i]*b[i];
```

Задача 4 (Копирование через один элемент)

```
for i:=1 to n do b[i]:=a[2*i];
```

Рассмотрим подробнее решения 1а и 1б. В основе этих решений лежат 2 *стратегически* отличающихся подхода. Первое решение можно прокомментировать так: «Выполняем $m+n$ шагов переписывания в массив C. На каждом шаге, если массивы A и B еще не исчерпаны, то переписываем текущий минимальный элемент, иначе — элемент из еще не исчерпанного массива». Второе решение соответствует подходу «Переписываем текущий минимальный элемент пока не исчерпается один из массивов. Затем дописываем оставшийся массив». Оба подхода в целом равноправны, хотя программа 2б будет выполняться быстрее.

Теперь сравним решения 2а и 2б. Формально решение 2б правильно, однако в аналогичных ситуациях здесь применены два *технически* отличающихся подхода: i нумерует *первый свободный* элемент массива и изменяется *после переписывания*, а k нумерует подготовительных задач

(б)

Задача 1

```
i:=1; j:=1; k:=1;
while (i<=n)AND(j<=m) do
begin if a[i]<b[j]
        then begin
               c[k]:=a[i]; i:=i+1 end
        else begin
               c[k]:=b[j]; j:=j+1 end;
  k:=k+1
end;
if j<=m then for j:=j to m do
               begin c[k]:=b[j];
                 k:=k+1 end
           else for i:=i to n do
           begin c[k]:=a[i];
             k:=k+1 end;
```

Задача 2

```
j:=1; k:=0;
for i:=1 to n do
begin
  if a[i]>0 then begin пол[j]:=a[i];
                     j:=j+1 end;
  if a[i]<0 then begin k:=k+1;
                     отр[k]:=a[i] end
end;
пол[j]:=0; отр[k+1]:=0;
```

Задача 4 (Копирование)

```
j:=2; for i:=1 to n do
begin b[i]:=a[j]; j:=j+2 end;
```

(в)

Задача 1

```
i:=1; j:=1;
for k:=1 to m+n do
begin if i>n then goto 2;
      if j>m then goto 1;
   if a[i]<b[j]
      then 1 : begin c[k]:=a[i];
                 i:=i+1 end
      else 2 : begin c[k]:=b[j];
                j:=j+1 end
end;
```

Задача 2

```
j:=0; k:=0;
for i:=1 to n do
begin
  if a[i]>0 then begin   пол[i-j]:=a[i];
                   k:=k+1 end;
  if a[i]<0 then begin   отр[i-k]:=a[i];
                   j:=j+1 end;
  if a[i]=0 then begin k:=k+1; j:=j+1
                   end
end;
пол[i-j]:=0; отр[i-k]:=a[i];
```

последний занятый элемент и изменяется *до переписывания*. В более сложных случаях такой разнобой в обработке сходных ситуаций может повлечь ошибку, и в любом случае он не способствует легкости понимания программы. В технических вопросах каждый программист должен иметь любимые технические приемы и не изменять им без достаточных оснований, тогда больше творческих сил останется на решение стратегических вопросов.

В программе 2*а* по два раза повторяются одинаковые строчки. Этого можно избежать путем, показанным в программе 2*в*. Хотя формально решение 2*в* правильно, но злоупотреблять «финтами» типа передачи управления внутрь условного оператора не следует, а современная теория не рекомендует пользоваться оператором перехода вообще. Отметим, что обойтись одним оператором **if**, записав условие переписи из A, например, так:

$$\textbf{if}((i<=n)AND(j<=m)AND\ (a[i]<b[j]))OR(i>n)\ \textbf{then}$$

нельзя, так как даже при невыполнении условия $i<=n$ ЭВМ все равно может провести вычисление выражения $a[i]<b[j]$, попытавшись обработать несуществующий элемент $a[n+1]$.

Контрольное задание

4.1. Выбросить из текста (массива символов) пробелы и «сжать» текст, сдвинув оставшиеся символы к левому краю. Обработку провести без дополнительного массива.

4.2. (Сборка по маске). Дано 2 массива равной длины и пустой массив. Элементы 2-го массива (маски) имеют значения **истина/ложь**. Значение ложь i-го элемента маски делает невидимым (маскирует) i-е значение исходного массива. Собрать видимые (отмеченные значением истина в маске) элементы первого массива в третий массив, прижав их к левому краю и заполнив остаток третьего массива нулями. (Обратите внимание, что 2 массива здесь будут обрабатываться синхронно, а третий — асинхронно по отношению к первым двум.)

4.3. (Разборка по маске). Дан массив, маска и пустой массив. Первые несколько элементов исходного массива разослать в те элементы пустого массива, которые отмечены в маске значением истина, остальные элементы заполнить нулями.

4.4. (Повышенной сложности.) В массиве могут быть несколько максимальных элементов. За один просмотр массива выписать в другой массив номера всех максимальных элементов исходного массива.

Подготовительные задачи к уроку 5

1. Вывести на печать таблицу значений функции $y=x^2$ при x изменяющемся от a до b с шагом h.

2. Найти среднее арифметическое элементов массива.

3. Дан массив действительных чисел. Найти в нем число, равное заданному; получить номер этого числа или нуль, если такого числа нет.

Л. Ф. Штернберг

kvant.mccme.ru

kvant.mccme.ru

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Всесоюзная заочная математическая школа Академии педагогических наук СССР при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова (сокращенно ВЗМШ) объявляет юбилейный, двадцатый набор учащихся на I курс.

Обычно прием в ВЗМШ производился по результатам выполнения вступительной контрольной работы, но в нынешнем году мы решили принять на I курс просто по заявлениям всех интересующихся математикой учеников седьмых классов и учащихся ПТУ, за исключением проживающих в гг. Москве и Ленинграде.

Обучение в ВЗМШ бесплатное, программа рассчитана на три года. В течение этого времени наши ученики будут регулярно получать от нас учебные пособия, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения.

Учиться у нас непросто. Здесь мало одного лишь желания, нужны еще усидчивость, настойчивость, сила воли: ведь требуется самостоятельно, с карандашом в руке изучить теорию, а затем (что самое интересное, но и самое трудное) — решить большое количество задач и выполнить контрольную работу. Задания высылаются примерно раз в месяц.

Ваши контрольные работы будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов страны, в которых имеются филиалы ВЗМШ, работающие по той же программе и пособиям. Как правило, контрольные работы состоят из двух частей: обязательной, содержащей сравнительно простые задачи, и дополнительной, которую выполняют более сильные учащиеся.

Программа ВЗМШ направлена на углубленное изучение основных вопросов школьного курса математики. За время обучения в ВЗМШ Вы более основательно познакомитесь с методом координат, углубите свои знания по арифметике целых чисел, будете решать много интересных задач по геометрии, математическому анализу и алгебре, получите представление о письменных и устных вступительных экзаменах в различные вузы.

Учеба в ВЗМШ поможет Вам научиться самостоятельно работать с книгой, а также четко, кратко и грамотно излагать свои мысли на бумаге; эти качества, безусловно, пригодятся Вам в дальнейшем. Итак, ВЗМШ ждет Ваши заявления.

Для зачисления в школу необходимо выслать не позднее 1 марта 1983 г. (по почтовому штемпелю) заявление по адресу «117234, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ. На прием.» или по адресу соответствующего филиала. Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в следующих городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Ижевск, Казань, Калинин, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Ростов-на-Дону, Свердловск, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста; филиалы при педагогических институтах — в городах Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Орел, Славянск, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск, Ярославль.

Учащиеся, проживающие на Северо-Западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской обл., Карельской АССР), в прибалтийских союзных республиках и в Белоруссии (кроме Витебской и Гомельской обл.) должны присылать по адресу: 193130, Ленинград, 8 Советская, 3, ЗМШ.

В заявлении должны быть указаны: область и точный почтовый адрес с индексом; фамилия, имя и отчество учащегося, класс и школа, в которой он учится.

В качестве первого задания мы предлагаем Вам изучить статью Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Арифметика и принципы подсчета» (см. с. 30).

Задание 1 — решить задачи №№ 1 а, г; 2 а, б, в; 3; 8 а, в, г; 9; 11; 14; 16 а, б; 17; 18 а,б; 19; 20 а, б, в; 21 (основные задачи) и №№ 4; 5; 6; 7; 10; 12; 15; 22; 23 (дополнительные задачи) из указанной статьи.

Контрольная работа (Задание 1) должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Задачи должны идти в том порядке, как они даны в статье, сначала условие, затем — решение. На обложке тетради надо наклеить листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	*Московская*
Фамилия, имя	*Иванов Петр*
Год рождения	*1969*
Класс и школа	*7 класс «г» школы № 2 г. Клина*
Фамилия, И. О. учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 1, мать — медсестра*
Полный почтовый адрес	*123456, г. Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1.*

kvant.mccme.ru

Срок отправки задания 1 — не позднее 5 мая 1983 г. (по почтовому штемпелю).

Для того чтобы задание было зачтено, не обязательно решить все задачи.

Если Вы успешно выполните это задание, то, начиная с сентября 1983 г., Вы будете получать все дальнейшие задания. Ждем Ваших писем.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Для учащихся седьмых классов, проживающих на территории европейской части РСФСР, в Белоруссии и Казахстане, объявляется прием на заочное отделение Малого механико-математического факультета — математической школы при механико-математическом факультете МГУ. (Предыдущее сообщение см. «Квант», 1982, № 1).

Основной задачей Малого механико-математического факультета (сокращенно МММФ) является приобщение к математике учащихся и выпускников общеобразовательных школ и других средних учебных заведений, в первую очередь, сельской и рабочей молодежи, и на этой основе расширение круга поступающих на механико-математический и другие факультеты МГУ.

Программа ММ МФ, направленная на углубление знаний по важнейшим разделам школьной программы и развитие у школьников навыков самостоятельных занятий математикой, составлена под руководством профессоров факультета.

Занятия начнутся с 1 сентября 1983 года. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно окончившие 8 или 9 классы, рекомендуются для поступления в физико-математический интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании ММ МФ.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 15 апреля 1983 года выслать решения по возможности большего числа задач вступительной контрольной работы ММ МФ, которая публикуется ниже. Семиклассники, проживающие в Астраханской, Брянской, Белгородской, Владимирской, Волгоградской, Воронежской, Горьковской, Ивановской, Калининской, Калужской, Костромской, Куйбышевской, Курской, Липецкой, Московской, Оренбургской, Орловской, Пензенской, Пермской, Ростовской, Рязанской, Саратовской, Свердловской, Смоленской, Тамбовской, Тульской, Ульяновской, Челябинской, Ярославской, Минской, Брестской, Витебской, Гомельской, Гродненской, Могилевской областях, в Башкирской АССР, Дагестанской АССР, Кабардино-Балкарской АССР, Калмыцкой АССР, Марийской АССР, Мордовской АССР, Северо-Осетинской АССР, Татарской АССР, Удмуртской АССР, Чечено-Ингушской АССР, Чувашской АССР, Краснодарском и Ставропольском краях присылают работы по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, мехмат, ММ МФ. Школьники из Казахстана обслуживаются Казахским филиалом ММ МФ МГУ и присылают работы по адресу: 480012, г. Алма-Ата ул. Кирова-Масанчи, 47/39, Казахский госуниверситет (Каз. ГУ), математический факультет, Казахский филиал ММ МФ МГУ.

Вступительная контрольная работа должна быть выполнена в ученической тетради в клетку. На обложку тетради наклеивается лист бумаги со следующими данными:

1. Область (край, республика)	*РСФСР, Московская обл.*
2. Фамилия и имя учащегося	*Осипов Андрей*
3. Класс и школа (полное название)	*Раменская средняя школа № 27 класс «В»*
4. Фамилия, имя и отчество учителя математики	*Бабенко Валентина Ивановна*
5. Полный домашний адрес	*140191, г. Раменское Московской обл. ул. Космонавтов, дом 3, кв. 36*
6. Сведения о родителях:	
Отец — фамилия, имя и отчество, где и кем работает	*Осипов Иван Матвеевич, слесарь завода МЭЗ*
Мать — фамилия, имя и отчество, где и кем работает	*Осипова Зинаида Андреевна, лаборантка завода МЭЗ*
7. Результаты проверки	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

В работу вкладывается листок 14×6 см, на котором пишется домашний адрес.

Для московских школьников 7—10 классов на механико-математическом факультете МГУ работает очное отделение ММ МФ (справки по телефону 139-39-43).

kvant.mccme.ru

Задачи вступительной контрольной работы на Малый механико-математический факультет в 1983 году

1. Разложить многочлен $x^6-6x^4+9x^2-4$ на
а) два множителя;
б) шесть множителей.

2. Докажите, что для любого числа $a>1$ выполнены неравенства $a-\frac{1}{2a-1}<\sqrt{a^2-1}<a-\frac{1}{2a}$.

3. На плоскости нарисован квадрат $ABCD$. Укажите множество всех точек M, не лежащих на сторонах квадрата и удовлетворяющих условию $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMD}=\widehat{DMA}$.

4. Билет на автобус называется «счастливым», если сумма первых трех цифр шестизначного номера (написанного на билете) совпадает с суммой трех его последних цифр. Могут ли номера двух «счастливых» билетов различаться на единицу?

5. Найдите все числа a, при каждом из которых уравнение $a^2x-a(x+1)-6x+3=0$ не имеет решений.

6. В правильном треугольнике со стороной 1 расположены пять точек. Докажите, что среди них найдутся две точки, расстояние между которыми не больше $1/2$.

7. Решите систему уравнений и неравенств:

$$\begin{aligned} &x(y-z)\geqslant 0\\ &y(z-x)\geqslant 0\\ &z(x-y)\geqslant 0\\ &x+y+z=3. \end{aligned}$$

8. Через вершину треугольника с попарно неконгруэнтными сторонами проведена прямая, делящая его на два треугольника.
а) Докажите, что эти треугольники неконгруэнтны;
б) Могут ли эти треугольники быть подобны?

9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны $[AB]$ и $[CD]$ конгруэнтны, но не параллельны. Докажите, что прямая, проходящая через середины диагоналей $[AC]$ и $[BD]$, образует равные острые углы с прямыми (AB) и (CD).

10. В канун Нового года Плюшкину стало жалко выбрасывать календарь за истекший год, и он решил воспользоваться им в будущем, дождавшись такого года, в котором каждое число каждого месяца приходится на тот же день недели, что и в его календаре. Через сколько лет ему в первый раз представится такая возможность?

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые и девятые классы на 1983/84 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры теоретической физики Московского института стали и сплавов и соответствует уровню требований, предъявляемых абитуриентам на вступительных экзаменах в вузы, прежде всего — в МИСиС.

Работа школы организована следующим образом. Пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач. Присланные учащимися контрольные работы проверяются преподавателями института и вместе с оценками и комментариями высылаются учащимся. В качестве годового задания учащимся десятых классов рассылаются материалы вступительных экзаменов в МИСиС за прошлые годы.

Занятия в ЗФТШ (МИСиСа) начнутся с 1 октября 1983 года. Для зачисления в школу необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по физике и математике. Заявление и справку нужно выслать не позднее 1 марта по адресу: 117049, Москва, Ленинский проспект, 4, МИСиС, ЗФТШ. О первом задании и первой контрольной работе по математике написано в статье «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» (см. с. 52).

Несколько слов о самом институте. Московский ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институт стали и сплавов готовит инженерные и научные кадры для металлургической промышленности и ряда новых отраслей науки и техники. На многих кафедрах института обучение строится так, что студенты уже с 3—4 курса приобщаются к самостоятельной научной работе. Работая над курсовыми и дипломными работами, которые обычно входят в план научных исследований соответствующих кафедр, студенты широко используют возможности институтского вычислительного центра, оборудованного современными ЭВМ.

Поступив в Московский институт стали и сплавов, вы сможете заниматься теорией и экспериментом в области физики твердого тела, исследованием свойств вещества при низких температурах, созданием и исследованием сплавов с новыми физическими и химическими свойствами, металловедением, рентгенографией, физикой и химией поверхности, физикой полупроводников, созданием новых полупроводниковых приборов, вычислительной математикой и многими другими увлекательными и актуальными проблемами науки и техники.

kvant.mccme.ru

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1982 году.

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$81^x+3^{2x+1}>54.$$

2. В трапеции $ABCD$ $\widehat{BAD}=90^\circ$, $\widehat{ADC}=30^\circ$. Окружность, центр которой лежит на отрезке AD, касается прямых AB, BC и CD. Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен R.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y-\operatorname{tg} x=1+\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y \\ \cos 2y+\sqrt{3}\cos 2x=-1. \end{cases}$$

4. Из точки $M(1;\,1)$ проведены касательные к двум ветвям гиперболы $y=\frac{k}{x}$ $(k<0)$, касающиеся этих ветвей в точках A и B, причем треугольник MAB — правильный. Найдите коэффициент k и площадь треугольника MAB.

5. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (S — вершина) длина стороны основания равна 2. Вершины K и M ромба $KLMFF$ лежат на ребрах AB и SD соответственно и $|KM|=3$, а отрезок KL пересекает ребро SB. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_3 x-\frac{2}{1+\log_x 27}=\frac{6}{3+\log_3 x}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x-2\sin x}=\operatorname{tg} x.$$

3. Равнобедренный треугольник ABC $(\widehat{C}=90^\circ)$ и треугольник DEF расположены так, что точка D лежит на стороне AB, а точка E — на продолжении стороны AB за точку A. Отрезок KL является средней линией в обоих треугольниках, и площадь четырехугольника $DKLB$ составляет $\frac{5}{8}$ площади треугольника ABC. Найдите $\widehat{DEF}$.

4. Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2\geqslant 10 \\ 3x^2-4x-32\leqslant 0 \\ (3x-2y)(3y-x+10)\geqslant 0. \end{cases}$$

5. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина бокового ребра равна 3. Точка M — середина ребра AC, точка N лежит на ребре B_1C_1, а точка P принадлежит грани AA_1B_1B и удалена от плоскости ABC на расстояние 1. Известно, что угол в 30° образуют прямые PM и PN — с плоскостью AA_1B_1B и прямая PN — с плоскостью BB_1C_1C. Найдите объем призмы.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x+5}{2x+1}}-\sqrt{5x-3}=0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{2-x}\left(\frac{3-x}{4-x}\right)<1.$$

3. Квадрат $ABCD$ и окружность расположены так, что окружность касается прямой AC в точке C, а центр окружности лежит по ту же сторону от прямой AC, что и точка D. Касательные к окружности, проведенные из точки D, образуют угол 120°. Найдите отношение площади квадрата к площади круга, ограниченного данной окружностью.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cos(4x-2y)=\sqrt{2}\cos(2x-2y) \\ \sqrt{2}\sin(x+y)=3\sin(y-x). \end{cases}$$

5. Сферы с центрами в точках O_1 и O_2 радиусов 3 и 1 соответственно касаются друг друга. Через точку M, удаленную от O_2 на расстояние 3, проведены две прямые, каждая из которых касается обеих сфер, причем точки касания лежат на прямых по одну сторону от точки M. Найдите угол между касательными, если известно, что одна из них образует с прямой O_1O_2 угол 45°.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Собака C бежит с постоянной скоростью v_0 по тропинке AB, составляющей угол $\alpha=60^\circ$ с горизонтально натянутой проволокой MN (рис. 1). К ошейнику собаки привязан легкий, горизонтально висящий трос длины l. Трос соединен с кольцом K массы m, которое может скользить по проволоке без трения. Найдите натяжение троса в момент, когда кольцо и собака находятся на одинаковых расстояниях от места пересечения D тропинки и проволоки.

2. Моль идеального газа нагревается при постоянном давлении, а затем при постоянном объеме переводится в состояние с температурой, равной начальной температуре $T_0=300$ К. Оказалось, что в итоге газу передано количество теплоты $Q=5000$ Дж. Во сколько раз изменился объем, занимаемый газом?

kvant.mccme.ru

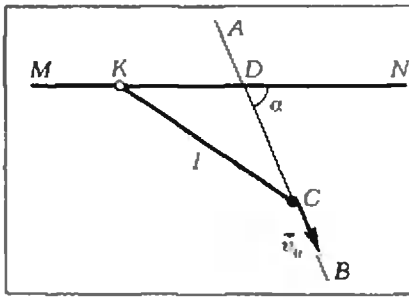


Рис. 1.

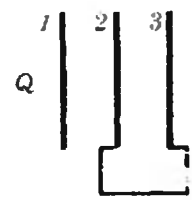


Рис. 2.

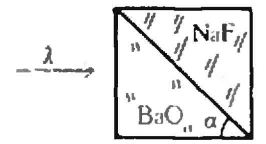


Рис. 3.

Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

3. Три плоские металлические пластины образуют сложный конденсатор (рис. 2). На пластине *1* находится заряд Q, а незаряженные пластины *2* и *3* закорочены проводником. Определите силу, действующую на пластину *2*. Площадь каждой пластины S.

4. На плоскопараллельную пластинку, составленную из двух прямоугольных призм, падает тонкий монохроматический пучок света с длиной волны $\lambda = 6{,}56 \cdot 10^{-7}$ м (рис. 3). Одна призма изготовлена из кристаллического фтористого натрия NaF, показатель преломления которого для указанной длины волны равен $n_1 = 1{,}324$. Другая призма изготовлена из кристаллической окиси бария BaO, показатель преломления которой равен $n_2 = 1{,}958$. При каких значениях угла α свет не пройдет через границу раздела призм?

Вариант 2

1. Баскетболист бросает мяч в кольцо. Скорость мяча сразу после броска равна $v_0 = 8$ м/с и составляет угол $\alpha = 60°$ с горизонтом. С какой скоростью мяч попал в кольцо, если он долетел до него за одну секунду? Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

2. Кристаллическая решетка железа при комнатной температуре — кубическая объемно центрированная. Это означает, что элементарной ячейкой является куб, во всех вершинах которого, а также в центре — на пересечении пространственных диагоналей — находятся атомы железа. Сколько атомов приходится на объем, равный объему одной элементарной ячейки в кристалле железа? Определите минимальное расстояние между атомами железа в кристалле, зная его молярную массу $A = 56$ кг/кмоль и плотность $\rho = 7870$ кг/м^3. Постоянная Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$.

3. Катушка из n_1 витков, площадь каждого из которых равна S, расположена в однородном магнитном поле. Вектор индукции поля $\vec{B}$ перпендикулярен виткам катушки (рис. 4). Вне поля расположена вторая катушка. Обе катушки соединены проводниками. Пренебрегая омическим сопротивлением катушек и проводников, определите величину тока, возникающую в катушках после выключения поля. Индуктивности катушек равны L_1 и L_2 соответственно.

4. На главной оптической оси тонкой положительной линзы диаметром D находится точечный источник света. Из линзы выходит пучок расходящихся лучей с углом расхождения α. Определите, каким будет угол расхождения лучей, если вместо положительной линзы на то же место поставить отрицательную линзу этого же диаметра и с тем же фокусным расстоянием (по модулю). Расстояние между источником и линзой равно d.

Вариант 3

1. Частоты излучения возбужденного атомарного водорода описываются формулой $\nu_{nm} = R(1/n^2 - 1/m^2)$, где R — некоторая постоянная, n и m — целые числа. Первоначально невозбужденный водород начинает излучать фотоны, если через него пропустить пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов не менее $U_0 = 10{,}2$ В. Какую минимальную ускоряющую разность потенциалов должен пройти пучок протонов, чтобы при пропускании их через первоначально невозбужденный водород последний начал излучать фотоны? Чему равна энергия ионизации атома водорода (в электронвольтах)? Считать, что масса электрона много меньше массы протона и что атом водорода перед ударом неподвижен.

2. В теплоизолированный сосуд объемом $V = 22{,}4$ дм^3, содержащий $n_1 = 1$ моль водорода при температуре $T_1 = 200$ К, добавляют $m_2 = 4$ г водорода. После установления равновесия давление в сосуде оказалось равным $p = 3 \cdot 10^5$ Па. Определите первоначальную температуру добавленного водорода.

3. В схеме, показанной на рисунке 5, в начальный момент ключ K замкнут и по цепи течет установившийся постоянный ток. Затем ключ размыкают. Определите количество теплоты, которое выделится в резисторе сопротивлением R_1, при следующих параметрах цепи: ЭДС источника $\mathcal{E}$, его внутреннее сопротив-

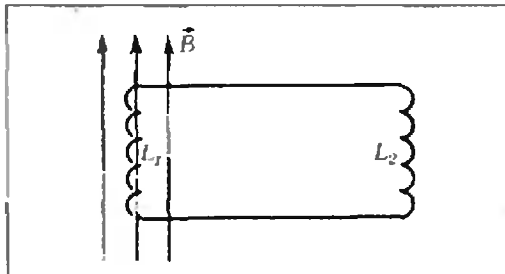


Рис. 4.

kvant.mccme.ru

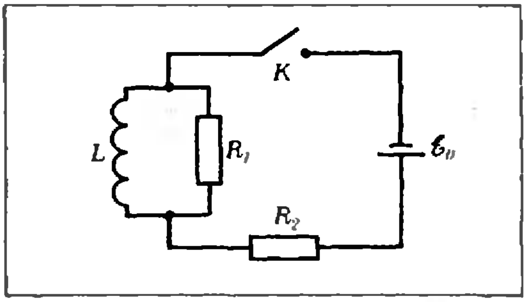


Рис. 5.

ление равно сопротивлению обоих резисторов: $r=R_1=R_2=R$, индуктивность катушки L.

4. С помощью тонкой линзы на экране получено изображение предмета с увеличением $\Gamma_1=2$. Предмет передвинули на $l=1$ см. Для того чтобы снова получить резкое изображение, пришлось передвинуть экран. При этом увеличение предмета оказалось равным $\Gamma_2=4$. На какое расстояние передвинули экран?

Публикацию подготовили
С. П. Коновалов, А. А. Шеронов

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-a+2}=1.$$

2. На координатной плоскости заданы точки $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$ и $C(5;\ 5)$. Вычислите площадь треугольника ABC и укажите все перемещения плоскости, при которых он отображается на себя.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin x=-\sqrt{3}\operatorname{tg} x.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$$

а) на отрезке $[0;\ 2]$, б) на промежутке $]2;\ 4[$.

5. Решите уравнение

$$|3x+3|=ax+4$$

и определите значения a, при которых оно имеет единственное решение.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_{x-2}(2x^2-4x+y+1)=2\\ x+y-3=a-a^2.\end{cases}$$

2. Даны две вершины равностороннего треугольника $A(-1;\ 1)$ и $B(-1;\ 3)$. Найдите его площадь и координаты третьей вершины C. Укажите все перемещения плоскости, при которых треугольник ABC отображается на себя.

3. Решите уравнение

$$\sin x+\cos x=\sqrt{1+\operatorname{tg} x}.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=x^2-3|x-3|-5x+10$$

а) на промежутке $[0;\ 2[$, б) на промежутке $[2;\ 4[$.

5. Решите уравнение

$$|3x+3|=ax^2+4$$

и определите значения a, при которых оно имеет единственное решение.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Человек начинает подниматься по движущемуся вверх эскалатору метро с ускорением $a=0{,}21$ м/с^2. Добежав до середины эскалатора, он поворачивает и начинает спускаться вниз с тем же ускорением. Сколько времени человек находился на эскалаторе, если длина эскалатора $l=100$ м, а скорость движения эскалатора $v=2$ м/с?

2. В некоторый момент времени протон и α-частица покоятся на расстоянии $a=10$ Å друг от друга. С какими скоростями будут двигаться эти частицы, когда расстояние между ними удвоится? Масса протона $m_p=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг, его заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

3. В сосуд, имеющий форму прямого кругового усеченного конуса с радиусом основания $R=10$ см, налита вода так, что ее уровень находится на высоте $h=10$ см от дна. Определите силу F давления воды на боковую поверхность сосуда, если образующая конуса составляет угол $\alpha=45°$ с его высотой.

4. Свинцовая пуля, летящая горизонтально со скоростью $v_0=500$ м/с, пробивает доску на высоте $h=2$ м над поверхностью земли, не изменяя направления своей скорости. На каком расстоянии от доски пуля упадет на землю, если при движении через доску она нагрелась на $\Delta t=200$ °С? Считать, что все выделившееся при движении через доску количество теплоты пошло на нагревание пули. Удельная теплоемкость свинца $c=130$ Дж/(кг·К). Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Цилиндр разделен на две части поршнем. В одной его части находится азот, а в другой — воздух. Температуры газов одинаковы и равны $T_0=300$ К, а соотношение их масс таково, что поршень делит цилиндр на две равные части объемом $V_0=1{,}3$ л каждая. На какое расстояние сместится поршень, если температура газа в одной из половин цилиндра увеличится на $\Delta T=50$ К, а в другой останется неизменной? Сечение цилиндра $S=100$ см^2.

6. Два одноименно заряженных шарика массой $m=0{,}5$ г каждый подвешены в вакууме на очень тонких невесомых, нерастяжимых и непроводящих нитях одинаковой длины (рис. 1). Каждая из нитей образует с вертикалью угол $\alpha=30°$. Затем вся система погружается в неэлектропроводящую жидкость с плотностью, равной плотности материала шариков, и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$. Найдите силу натяжения нитей после погружения в жидкость. Каков характер равновесия шариков?

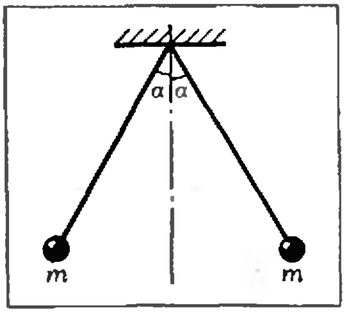


Рис. 1.

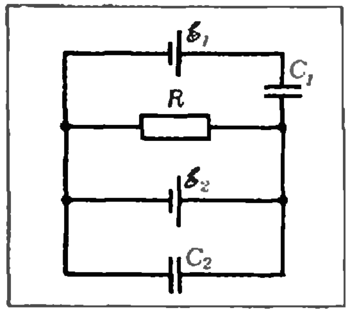


Рис. 2.

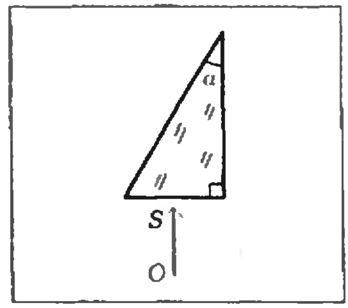


Рис. 3.

7. Определите заряды конденсаторов емкостью $C_1=2$ мкФ и $C_2=5$ мкФ (рис. 2), если $\mathcal{E}_1=10$ В, $\mathcal{E}_2=5$ В, внутренние сопротивления источников $r=2$ Ом, сопротивление $R=38$ Ом.

8. В катушке индуктивности сила тока линейно увеличивается со скоростью $\Delta I/\Delta t=10$ А/с. Найдите ЭДС индукции, возникающую при этом в катушке, если резонансная частота колебательного контура, образованного из этой катушки и конденсатора емкостью $C=100$ пФ, равна $\nu=100$ кГц.

9. Световой луч OS падает на основание прямоугольной призмы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n=1{,}5$ (рис. 3). Под каким углом к направлению первоначального распространения пойдет этот луч при выходе из призмы, если угол при вершине призмы $\alpha=30°$, а угол падения OS на основание равен нулю?

10. Определите скорость свободных электронов, образующихся при фотоионизации атомов водорода электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda=500$ Å. Энергия ионизации водорода $E=2{,}17\cdot10^{-18}$ Дж, масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг. Импульсом фотона пренебречь.

Публикацию подготовили
Г. В. Ефашкин, В. А. Тонян

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Найдите $f'(1)$, если $f(x)=2\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos x}=2(\sin x+\cos x).$$

3. Решите неравенство

$$\log_4\frac{x}{5x-1}<1.$$

4. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 45°. Длина стороны основания равна a. Определите площадь боковой поверхности призмы.

5. Найдите все значения a, при которых корни уравнения

$$ax^2+2(a+3)x+a+2=0$$

неотрицательны.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Найдите производную функции $y=\frac{\sin x+\cos x}{x}$.

2. Решите уравнение

$$\sin x\cdot\cos x-\sin^2x-\cos x+\sin x=0.$$

3. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. Диагональ большей боковой грани и диагональ другой боковой грани, исходящие из одной вершины, образуют между собой угол α. Найдите объем призмы.

4. Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ — единичные, ортогональные. Докажите, что треугольник ABC, где $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{j}$, — прямоугольный, и найдите его площадь.

5. Решите уравнение

$$2^x+3^{x-2}=3^x-2^{x+1}.$$

Вариант 3
(индустриально-педагогический факультет)

1. Найдите производную функции $y=x\cdot\ln x$.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x-\dfrac{3(x-1)+8}{4}>2(x+1) \\ 1+\dfrac{2(1-x)}{3}<\dfrac{5}{3}+x. \end{cases}$$

3. Решите уравнение

$$\cos^2x-\sin^2x-5\sin x-3=0.$$

4. Решите уравнение

$$\log_2x+\log_2(x+5)=\log_2 50.$$

5. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно d. Угол между образующей и высотой равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Физика

Задачи устного экзамена

1. За пятую секунду прямолинейного равнозамедлительного движения точка проходит

путь $l=5$ см и останавливается. Какой путь проходит точка за третью секунду этого движения?

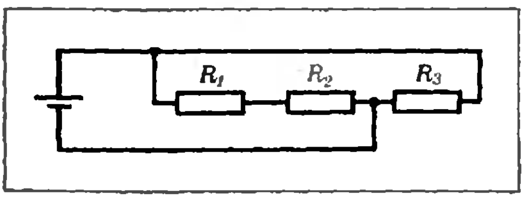
2. Тело положили на наклонную плоскость, составляющую с горизонтом угол $\alpha=30°$. С каким ускорением будет двигаться тело, если коэффициент трения тела о плоскость $\mu=0{,}03$?

3. В вагоне, движущемся горизонтально с постоянным ускорением $a=3$ м/с^2, на проволоке висит груз массой $m=2$ кг. Определите силу натяжения проволоки и угол ее отклонения от вертикали. Груз относительно вагона неподвижен.

4. Конькобежец массой $M=60$ кг, стоя на льду, бросает в горизонтальном направлении шайбу массой $m=0{,}3$ кг со скоростью $v=40$ м/с. На какое расстояние откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $\mu=0{,}04$?

5. Какой груз нужно положить на плоскую льдину, чтобы она полностью погрузилась в воду? Площадь льдины $S=1$ м^2, ее толщина $d=20$ см, плотность льда $\varrho_л=0{,}9$ г/см^3.

6. Внешняя цепь гальванического элемента составлена из трех резисторов (см. рисунок). Найдите сопротивление этой цепи, если сопротивления резисторов $R_1=R_2=R_3=R=1$ Ом.



7. Две лампы, рассчитанные на одно и то же напряжение, имеют номинальные мощности $P_1=60$ Вт и $P_2=100$ Вт соответственно. На какой из ламп и во сколько раз будет выделяться бóльшая мощность при последовательном включении обеих ламп в сеть с номинальным напряжением?

8. На каком расстоянии от рассеивающей линзы с оптической силой $D=-5$ дптр надо поместить предмет, чтобы его мнимое изображение получилось в $n=4$ раза меньше самого предмета?

9. Диапозитив имеет размеры 8×8 см. Определите фокусное расстояние объектива проекционного аппарата, если на экране, находящемся от него на расстоянии $l=4{,}5$ м, получается изображение размером $2{,}5\times2{,}5$ м.

10. Работа выхода электронов из натрия $A=2{,}27$ эВ. Найдите красную границу фотоэффекта для натрия. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Публикацию подготовили
А. М. Березман, О. Ю. Овчинников, С. В. Пчелинцев

Ответы, указания, решения

Меандры рек

Найдем форму поверхности жидкости, вращающейся в стакане с угловой скоростью ω. Обратимся к рисунку 1 (см. с. 18). Если линейный размер выделенного кубика Δr, то его масса равна

$$\Delta m=\varrho\cdot\Delta s\cdot\Delta r.$$

Используя это выражение для Δm, из уравнений (1) и (2) (см. с. 18) получаем:

$$\Delta h=(\omega^2/g)r\cdot\Delta r.$$

Таким образом, тангенс угла α наклона касательной к кривой, изображающей сечение свободной поверхности жидкости на рисунке 1, растет пропорционально расстоянию от центра:

$$\operatorname{tg}\alpha=\Delta h/\Delta r=(\omega^2/g)r.$$

Если высота уровня жидкости на оси вращения равна h_0, то для того, чтобы найти ее на расстоянии r, надо добавить к h_0 величину среднего значения $\operatorname{tg}\alpha$, умноженную на r. Среднее значение величины, изменяющейся по линейному закону, легко найти, взяв полусумму крайних значений. Соответственно получаем

$$h(r)=h_0+\frac{\omega^2 r}{2g}r.$$

Как видно, зависимость $h(r)$ является квадратичной, а ее график изображается параболой. (Те, кто знакомы с интегральным исчислением, конечно, поняли, что мы таким образом вычислили интеграл.)

Любопытно, что параболичность формы вращающейся жидкости использовалась на практике для создания телескопа. Знаменитый американский физик Роберт Вуд построил телескоп с параболическим зеркалом, поместив на дне колодца вращающийся сосуд со ртутью.

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант I

1. $\left]\frac{1}{2}\log_3 6;\ +\infty\right[$.

2. $\frac{6-\sqrt{3}}{2}R^2$. Указание. Данная окружность касается прямой AB в точке A.

3. $x=-\frac{5}{12}\pi+\pi k,\ y=-\frac{\pi}{6}+\pi l\ (k,\ l\in Z)$. Указание. Первое уравнение системы равносильно уравнению

$$\frac{\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}=1,$$

которое, если x и y не являются числами

kvant.mccme.ru

вида $\frac{\pi}{2}+\pi m$, в свою очередь, равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}(y-x)=1.$$

4. $k=-\frac{1}{2}$, $S_{\triangle MAB}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Указание. Точки A и B симметричны относительно прямой $y=x$. Для определения k используйте равенство $|AB|=|AM|$.

5. $6\sqrt{3}$. Решение. Проведем через точку S прямую, параллельную (FM); обозначим точку пересечения этой прямой с (ABC) через P (рис. 1). Из $S\in(FSD)$ и $(FM)\subset(FSD)$

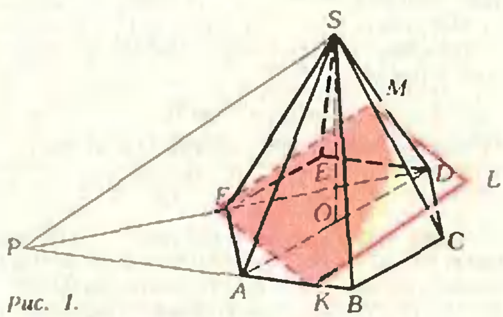


Рис. 1.

следует $(SP)\subset(FSD)$. Поскольку $P\in(FSD)$ и $P\in(ABC)$, $P\in(FD)$. Так как отрезок KL пересекает ребро SB, $(KL)\subset(ASB)$. Из $(SP)\parallel(KL)$ и $S\in(ASB)$ следует $(SP)\subset(ASB)$. Поскольку $P\in(ASB)$ и $P\in(ABC)$, $P\in(AB)$. Итак, $(AB)\cap(FD)=P$. Так как $\widehat{FAD}=\widehat{FAP}$ и $\widehat{AFD}=90°$, $|PF|=|FD|$. По теореме Фалеса $|SM|=|MD|$.

Положим $|SA|=b$, $|AK|=x$. Из $\triangle AFD$ $|FD|=2\sqrt{3}$. Из $\triangle FSD$ $|FM|^2=\frac{b^2}{4}+6$. Из $\triangle AFK$ $|FK|^2=x^2+2x+4$. Итак,

$$\frac{b^2}{4}+6=x^2+2x+4. \qquad (1)$$

Пусть M_1 — ортогональная проекция точки M на (ABC), M_2 — проекция точки M_1 на (AB), O — основание высоты пирамиды. $|KM|^2=|KM_2|^2+|M_2M_1|^2+|M_1M|^2=\left(|AM_2|-|AK|\right)^2+\left(\frac{3}{4}|BD|\right)^2+\left(\frac{1}{2}|SO|\right)^2=$

$$=\left(\frac{3}{4}\cdot 2-x\right)^2+\left(\frac{3}{4}\sqrt{16-4}\right)^2+$$

$+\left(\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4}\right)^2=x^2-3x+8+\frac{b^2}{4}$. Итак,

$$x^2-3x+8+\frac{b^2}{4}=9. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) находим $b=\sqrt{13}$, $x=\frac{3}{2}$ (значит, $M_2=K$). Следовательно, $|SO|=3$, $V=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 3=6\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. $\{9\}$.

2. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\ (k\in\mathbf{Z})$. Указание. Перенесите $\operatorname{tg}x$ в левую часть уравнения и приведите дроби к общему знаменателю.

3. $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$. Указание. $(KL)\parallel(AB)$.

4. $27\frac{11}{27}-5\pi$. Указание. Прямая $3y-x+10=0$ касается окружности $x^2+y^2=10$.

5. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Решение. Пусть M_1 — проекция точки M на (ABB_1), N_1 — проекция N на

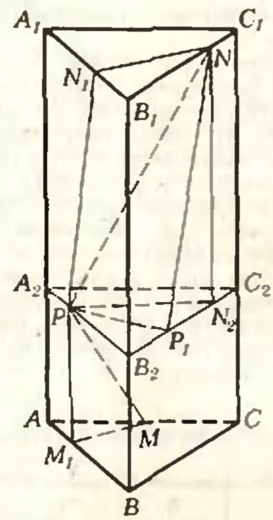


Рис. 2.

(ABB_1), P_1 — проекция P на (BCC_1) (рис. 2). Проведем через точку P плоскость, параллельную (ABC); обозначим точки ее пересечения с соответствующими боковыми ребрами призмы через A_2, B_2, C_2. Поскольку боковые грани правильной призмы перпендикулярны плоскостям ее оснований, $M_1\in[AB]$, $N_1\in[A_1B_1]$, $P_1\in[B_2C_2]$. Из прямоугольного треугольника PNN_1 $(\widehat{NPN_1}=30°)$ $|NN_1|=\frac{1}{2}|PN|$. Из прямоугольного треугольника B_1NN_1 $|B_1N|=\frac{|PN|}{\sqrt{3}}$. Аналогично, из треугольников PNP_1 и PB_2P_1 $|B_2P|=\frac{|PN|}{\sqrt{3}}$. Обозначим через N_2 проекцию точки N на (B_2C_2). Тогда $|B_2N_2|=|B_1N|=|B_2P|$; значит, $|PN_2|=|B_2P|$. Из прямоугольного треугольника PNN_2 по теореме Пифагора находим ($|NN_2|=2$) $|PN|=\sqrt{6}$, откуда $|B_2P|=\sqrt{2}$. Из $\triangle ABC$ $|MM_1|=\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|$, $|AM_1|=\frac{1}{4}|AB|$, $|BM_1|=\frac{3}{4}|AB|$. Из прямоугольного треугольника PMM_1 $(\widehat{MPM_1}=30°)$ $|PM_1|=\frac{3}{4}|AB|$. Из прямоугольной трапеции PB_2BM_1 находим ($|BB_2|=1$) $|AB|=\sqrt{2}$. Замечание. Так как $|B_2P|=|B_1N|=|AB|$, получаем $P=A_2$ и $N=C_1$. На рисунке 2 — не так, поскольку, когда мы его рисовали, мы этого еще не знали.

Вариант 3

1. $\{1\}$.

2. $]-\infty;\ 1[\ \cup \left[\dfrac{5-\sqrt{5}}{2};\ 2\right[$.

3. $\dfrac{4+\sqrt{15}}{3\pi}$. Указание. Из $\triangle DOE$ (O — центр окружности, E — любая из точек касания указанных в условии касательных) выразите $|DO|$ через радиус окружности R, примените к $\triangle DOC$ теорему косинусов.

4. $x=\pm\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)+\pi k$, $y=\mp\dfrac{3}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\pi l\ (k, l\in\mathbf{Z})$. Указание. Перемножив, соответственно, левые и правые части уравнений, преобразуйте полученные произведения в сумму синусов. Не забудьте, что при таком способе решения необходима проверка!

5. $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$. Решение. Пусть первая прямая касается сфер в точках A и B, а вторая — в точках C и D, O_1' и O_2' — центры сечений сфер плоскостью AMC (рис. 3).

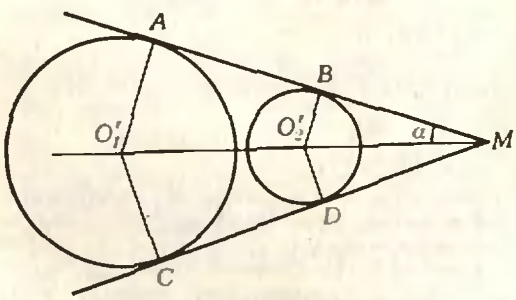
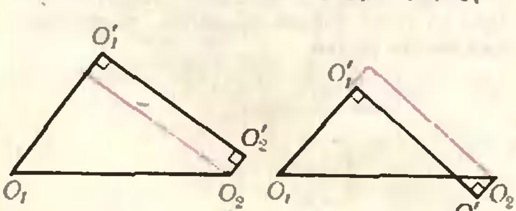


Рис. 3.

Так как $(O_2D)\perp(MD)$, $|DM|=\sqrt{|O_2M|^2-|DO_2|^2}=2\sqrt{2}$. Умножив скалярно обе части равенства $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2D}$ на вектор $\overrightarrow{CD}$, получим $|CD|^2=|CD|\cdot|O_1O_2|\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, поскольку $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CO_1}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{O_2D}=0$. Отсюда $|CD|=2\sqrt{2}$. Положим $\widehat{AMO_1'}=\alpha$. Имеем $|DO_2'|=2\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$, $|CO_1'|=4\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$, $|O_1'O_2'|=\dfrac{2\sqrt{2}}{\cos\alpha}$. Далее, $|O_1O_1'|=\sqrt{|O_1C|^2-|CO_1'|^2}=\sqrt{9-32\operatorname{tg}^2\alpha}$, $|O_2O_2'|=\sqrt{|O_2D|^2-|DO_2'|^2}=\sqrt{1-8\operatorname{tg}^2\alpha}$. Отрезки O_1O_2 и $O_1'O_2'$ могут не пересекаться (рис. 4, *а*) и могут пересекаться (рис. 4, *б*). Не зная пока, каково их расположение в данном случае, мы можем составить уравнение $16=|O_1O_2|^2=(|O_1O_1'|\pm|O_2O_2'|)^2+|O_1'O_2'|^2=$



а) *б)*

Рис. 4.

$=(\sqrt{9-32\operatorname{tg}^2\alpha}\pm\sqrt{1-8\operatorname{tg}^2\alpha})^2+\dfrac{8}{\cos^2\alpha}$,

из которого находим $\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{9}$. Проверка показывает, что внутри скобки должен стоять знак $+$.

Физика

Вариант 1

1. Рассмотрим кольцо K, скользящее по проволоке (рис. 5). На него действуют две силы: натяжение троса $\vec{T}$ и реакция проволоки $\vec{F}$, направленная перпендикулярно проволоке (так как трение отсутствует). Под действием этих сил кольцо с ускорением скользит по проволоке. Если из кинематических соображений определить ускорение кольца в заданный в условии момент времени, то можно будет найти и искомое натяжение троса.

Введем косоугольную систему координат, направив оси X и Y, как показано на рисунке 5. В любой момент времени расстояние между

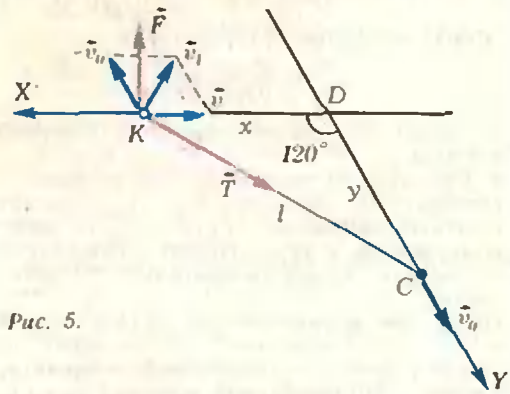


Рис. 5.

кольцом и собакой равно длине троса l, а координаты x кольца и y собаки связаны с l по теореме косинусов:

$$l^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ=x^2+y^2+xy.$$

Продифференцируем это равенство дважды по времени:

$$2(x')^2+2xx''+2(y')^2+2yy''+2x'y'+xy''+yx''=0.$$

Поскольку собака бежит с постоянной скоростью v_0, в любой момент времени $y'=v_0$ и $y''=0$. Так как трос нерастяжим, проекции скоростей кольца и собаки на направление троса KC одинаковы, а в данный момент времени одинаковы и модули этих скоростей: $v=v_0$, $x'=-v_0$ (знак «минус» связан с выбором положительного направления оси X). Координаты x и y можно связать с длиной троса l с помощью теоремы синусов: $x=y=l\operatorname{tg}30^\circ$.

Таким образом, ускорение кольца в рассматриваемый момент времени равно

$$x''=-\frac{2v_0^2}{2x+y}=-\frac{2v_0^2}{3l\operatorname{tg}30^\circ},$$

а натяжение троса (согласно второму закону Ньютона) —

$$T=\frac{m|x''|}{\cos 30^\circ}=\frac{2mv_0^2}{3l\sin 30^\circ}=\frac{4mv_0^2}{3l}.$$

kvant.mccme.ru

Приведем еще одно, более короткое, решение этой же задачи. Будем рассматривать движение кольца в инерциальной системе отсчета, связанной с собакой. В этой системе кольцо движется по окружности радиуса l со скоростью $\vec{v}_1=\vec{v}-\vec{v}_0$ (из рисунка 1 видно, что $v_1=v=v_0$).

По второму закону Ньютона

$$\frac{mv_1^2}{l}=T-F\sin 30°,$$

где $v_1=v_0$, а $F=T\sin 30°$ (в неподвижной системе кольцо движется вдоль горизонтальной проволоки и по вертикали не смещается). Отсюда получается приведенное выше значение для силы натяжения троса.

2. По условию задачи конечная температура газа равна начальной T_0. Это означает, что внутренняя энергия газа не изменилась, а все подведенное количество теплоты Q пошло на совершение газом работы A по расширению во время нагревания при постоянном давлении p_0 (при изохорном охлаждении работа газа равна нулю):

$$Q=A=p_0(V-V_0)=p_0V_0(V/V_0-1)=RT_0(V/V_0-1).$$

Отсюда отношение объемов равно

$$\frac{V}{V_0}=\frac{Q}{RT_0}+1\approx 3$$

— объем газа увеличился приблизительно в 3 раза.

3. Прежде всего, определим заряды, индуцированные на пластинах *2* и *3*. Поскольку пластины закорочены и суммарно не заряжены, на них могут возникать лишь равные по модулю и противоположные по знаку заряды.

Пусть, для определенности, заряд Q первой пластины положительный, тогда заряд q_2 второй пластины отрицательный, а заряд q_3 третьей — положительный: $q_2=-q$ и $q_3=+q$. Разность потенциалов между пластинами *2* и *3* равна нулю; следовательно, электрическое поле в области между этими пластинами, представляющее суперпозицию полей зарядов Q, q_2 и q_3, равно нулю:

$$\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}-2\frac{q}{2\varepsilon_0 S}=0, \text{ и } q=\frac{Q}{2}.$$

Сила F, действующая на заряд второй пластины, определяется суммарным полем зарядов Q и q_3:

$$F=q_2\left(\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}-\frac{q_3}{2\varepsilon_0 S}\right)=-\frac{Q^2}{8\varepsilon_0 S}$$

(знак «минус» означает, что сила направлена к первой пластине).

4. Угол падения света на границу раздела призм равен $90°-\alpha$. Свет испытает полное отражение, а значит, не пройдет через границу раздела призм, при условии $90°-\alpha>\arcsin(n_1/n_2)$. Отсюда

$$\alpha<90°-\arcsin(n_1/n_2)\approx 47{,}5°.$$

Вариант 2

1. $v=\sqrt{(v_0\sin\alpha-gt)^2+(v_0\cos\alpha)^2}\approx 5$ м/с (здесь $t=1$ с).

2. Очевидно, что каждый из атомов, находящихся в вершинах куба со стороной a, принадлежит одновременно восьми ячейкам. Поэтому на объем, равный объему одной элементарной ячейки, приходится 2 атома (один из них находится в центре куба). Этот объем равен $V=a^3=2A/(\varrho N_A)$ (здесь A/ϱ — объем моля, содержащего N_A атомов). Минимальное расстояние между атомами равно

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2A}{\varrho N_A}\right)^{1/3}\approx 2{,}5\cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

3. Поскольку омическим сопротивлением катушек можно пренебречь, сумма всех ЭДС, возникающих в катушках при выключении магнитного поля, равна нулю:

$$n_1S\frac{\Delta B}{\Delta t}-L_1\frac{\Delta I}{\Delta t}-L_2\frac{\Delta I}{\Delta t}=0.$$

Как видно, изменение тока в контуре ΔI связано с изменением магнитного поля ΔB коэффициентом пропорциональности $n_1S/(L_1+L_2)$, не зависящим от времени. Поэтому величина установившегося тока равна

$$I=n_1SB/(L_1+L_2).$$

4. Тангенс угла расхождения лучей β, вышедших из рассеивающей линзы, определяется формулой

$$\operatorname{tg}(\beta/2)=D/d-\operatorname{tg}(\alpha/2).$$

Вариант 3

1. $U_p=U_0\dfrac{1+m_p/m_в}{1+m_e/m_в}\approx 2U_0\approx 20{,}4$ В;

$$E_и=\frac{4}{3}\,\frac{eU_0}{1+m_e/m_в}\approx\frac{4}{3}eU_0\approx 13{,}6 \text{ эВ}.$$

(Здесь m_p — масса протона, $m_в$ — масса атома водорода, m_e — масса электрона, причем $m_p\approx m_в$ и $m_e\ll m_p$.)

Указания. 1) Энергия ионизации атома водорода $E_и$ соответствует переходу $n=1$, $m\to\infty$, а минимальная энергия, требующаяся для возбуждения атома из основного состояния, соответствует переходу $n=1$, $m=2$. 2) При возбуждении атома столкновением минимальная кинетическая энергия налетающей частицы (а значит, и минимальная ускоряющая разность потенциалов) достигается при абсолютно неупругом ударе.

2. $T_2=\dfrac{(pV/R-n_1T_1)}{m_2/\mu}\approx 310$ К

($\mu=2$ г/моль — молярная масса водорода).

3. $Q=L\mathcal{E}_0/(8R^2)$.

4. $L=\Gamma_1\Gamma_2 l=8$ см.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $\varnothing$ при $a<1$, $\left\{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{7}{4}\right\}$ при $a>1$.

Указание. Данное уравнение равносильно каждой из систем

$$\begin{cases}(\sqrt{x+2}-1)^2=(\sqrt{x-a+2})^2\\ \sqrt{x+2}-1>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+1=2\sqrt{x+2}\\ x>-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+1)^2=4(x+2)\\ x>-1\\ a+1>0.\end{cases}$$

Можно также просто возвести обе части уравнения $\sqrt{x+2}-1=\sqrt{x-a+2}$ в квадрат, но сделать потом проверку.

2. $\frac{9}{2}$; $\triangle ABC$ отображается на себя при тождественном отображении и при осевой симметрии относительно прямой $y=x$.
Указание. При искомых перемещениях плоскости вершина C и множество $\{A, B\}$ отображаются на себя. (Подробнее — см. «Квант», 1979, № 7, с. 60.)

3. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{5}{6}\pi+2\pi l$ $(k, l\in \mathbf{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}2\sin x=3\,\mathrm{tg}^2\, x\\ \mathrm{tg}\,x<0.\end{cases}$$

4. а) $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)=5$, $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(0)=1$;
б) $\min\limits_{]2;4[} f(x)=f(3)=1$, $\max\limits_{]2;4[} f(x)$ не существует.
Указание. Область значений функции f на $]2;4[$ — промежуток $[1;5[$.

5. $\left\{\frac{1}{3-a}\right\}$ при $a>4$ и при $a<-3$, $\left\{-\frac{7}{a+3}\right\}$ при $3<a<4$, $\left\{\frac{1}{3-a}, -\frac{7}{a+3}\right\}$ при $-3<a<3$.
Указание. Нарисуйте график функции $y=|3x+3|$ и вращайте прямую $y=ax+4$ вокруг точки $(0;4)$.

Вариант 2

1. $\{(a; 3-a^2)\}$ при $a>3$ и при $2<a<3$, $\{(1-a;\ 2+2a-a^2)\}$ при $-2<a<-1$ и при $a<-2$, $\varnothing$ при $a=3$, $-1\leqslant a\leqslant 2$ и $a=-2$. Указание. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases}(x-2)^2=2x^2-4x+y+1\\ x+y-3=a-a^2\\ x-2>0\\ x-2\neq 1.\end{cases}$$

2. $\sqrt{3}$, $(\sqrt{3}-1;2)$ или $(-\sqrt{3}-1;2)$; $\triangle ABC$ отображается на себя при тождественном отображении, осевых симметриях относительно высот и поворотах вокруг центра треугольника на $\pm60°$. Указание. При искомых перемещениях плоскости множество $\{A, B, C\}$ отображается на себя.

3. $x_1=2\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi l$, $x_3=\frac{\pi}{4}+2\pi m$ $(k,l,m\in\mathbf{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(\sin x+\cos x)^2=1+\mathrm{tg}\,x\\ \sin x+\cos x\geqslant 0.\end{cases}$$

4. а) $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(0)=1$, $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)=0$;
б) $\max\limits_{]2;4[} f(x)=f(3)=4$, $\min\limits_{[2;4[} f(x)=f(2)=1$.
Указание. Нарисуйте график функции f.

5. $\varnothing$ при $a>\frac{9}{4}$, $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ при $a=\frac{9}{4}$, $\left\{\frac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2a}\right\}$ при $\frac{9}{28}<a<\frac{9}{4}$ и при $a<-4$, $\left\{-\frac{14}{3}, \frac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2a}\right\}$ при $a=\frac{9}{28}$, $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{9-28a}}{2a}, \frac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2a}\right\}$ при $0<a<\frac{9}{28}$, $\left\{-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ при $a=0$, $\left\{\frac{-3+\sqrt{9-28a}}{2a}, \frac{3-\sqrt{9-4a}}{2a}\right\}$ при $-4<a<0$. Указание. Нарисуйте график функции $y=|3x+3|$ и рассмотрите семейство кривых $y=ax^2+4$, изменяя a от $+\infty$ до $-\infty$ (все эти кривые проходят через точку $(0;4)$).

Физика

1. $t=2\sqrt{v^2+la}/a\approx 47{,}6$ с.
2. $v_\alpha=e/\sqrt{10am_p}\approx3{,}7\cdot10^3$ м/с.
$v_p=4e/\sqrt{10am_p}\approx1{,}5\cdot10^4$ м/с.
3. $F=\frac{\pi\varrho g h^2(3R-h\,\mathrm{tg}\,\alpha)}{3\cos\alpha}\approx29{,}2$ Н.
4. $l=\sqrt{2h(v_0^2-2c\Delta t)/g}\approx286$ м.
5. $x=\frac{V_0}{S}\frac{\Delta T}{2T_0+\Delta T}=1$ см.
6. $T=\frac{mg\sin^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}{\varepsilon}\approx3{,}5\cdot10^{-4}$ Н.
равновесие безразличное.
7. $Q_1=C_1\frac{(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)R+\mathscr{E}_1 r}{R+r}=10^{-5}$ Кл;
$Q_2=C_2\frac{\mathscr{E}_2R}{R+r}\approx2{,}4\cdot10^{-5}$ Кл.
8. $\mathscr{E}=\frac{\Delta I/\Delta t}{4\pi^2\nu^2C}\approx0{,}25$ В.
9. $\beta=\pi/2-\arcsin(n\cos2\alpha)\approx48{,}6°$.
Указание. На первой боковой грани луч претерпевает полное отражение.
10. $v=\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda}-E\right)}\approx2\cdot10^6$ м/с.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 0.
2. $x=\mathrm{arctg}\,(1\pm\sqrt{2})+\pi k\,(k\in\mathbf{Z})$.
3. $]-\infty;0[\ \cup\ ]\frac{4}{19};+\infty[$.
4. $3\sqrt{3}a^2$.
5. $[-2\frac{1}{4};-2]$.

Вариант 2

1. $\frac{(x-1)\cos x-(x+1)\sin x}{x^2}$.
2. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.
3. $\frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{\cos 2a}}{\sin a}$.
4. 5. Указание. Найдите $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.
5. $\{3\}$.

Вариант 3.

1. $\ln x+1$
2. $\varnothing$.
3. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\,(k\in\mathbf{Z})$.
4. $\{5\}$.
5. $\pi d^2\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}$.

kvant.mccme.ru

Физика

1. $l' = 5l = 25$ см.
2. $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 4{,}6$ м/с^2.
3. $F_н = m\sqrt{g^2 + a^2} \approx 20{,}5$ Н; $\alpha = \operatorname{arctg}(a/g) \approx 17°$.
4. $l = \dfrac{m^2v^2}{2\mu g M^2} \approx 0{,}05$ м.
5. $m = Sd(\varrho_в - \varrho_л) = 20$ кг (здесь $\varrho_в = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды).
6. $R_{общ} = \dfrac{(R_1+R_2)R_3}{R_1+R_2+R_3} = \dfrac{2}{3}R = \dfrac{2}{3}$ Ом $\approx 0{,}7$ Ом.
7. Бо́льшая мощность будет выделяться на первой лампе, при этом $P_1'/P_2' = P_2/P_1 = 5/3$.
8. $d = \dfrac{1-n}{D} = 0{,}6$ м.
9. $F = \dfrac{lh}{H+h} \approx 0{,}14$ м (здесь $h = 8$ см и $H = 2{,}5$ м).
10. $\lambda_к = \dfrac{hc}{A} \approx 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м.

Квант для младших школьников

(см. «Квант», 1982, № 12)

1. Для того чтобы число делилось на 36, нужно, чтобы оно делилось на 4 и на 9. Чтобы число делилось на 4, нужно, чтобы число, образованное двумя его последними цифрами, делилось на 4. Отсюда последней цифрой может быть либо 0, либо 4, либо 8. Для того, чтобы число делилось на 9, нужно, чтобы сумма его цифр делилась на 9. Отсюда мы получаем для цифры, замененной второй звездочкой, в первом случае 9, во втором 5 и в третьем 1. Таким образом, условию удовлетворяют числа 52920, 52524 и 52128.
2. Первой была положена желтая салфетка, а коричневая была положена раньше белой.
3. Задача основана на путанице одинаковых названий для единиц времени и величин углов. В условии «секунда» означает единицу времени, «минута» — единицу величины угла.
4. Для чисел 43 и 63. Составим уравнение, выражающее условие задачи: $10x + y = x^2 + y^3$. Преобразуем его: $x(10-x) = (y-1)y(y+1)$. Выражение справа есть произведение трех последовательных чисел и, следовательно, $x(10-x)$ делится на 2 и на 3. Отсюда следует, что x четно. Кроме того, либо x, либо $10-x$ должно делиться на 3. Это может быть в двух случаях: $x=6$ и $x=4$. В обоих случаях $y=3$. Получаем два решения: $43=16+27$ и $63=36+27$.
5. 33 числа, причем среднее — четное, а остальные — нечетные.

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1982, № 10)

Задание 19. 1. Kf3 Kf6 2. Ke5 d6 3. Kc6 Kfd7 4. K:b8 K:b8.

Задание 20. За три хода позиция получается очень просто: 1. e4 e6 2. Cb5 c6 3. C:c6 dc (или 2. Cc4 c6 3. C:e6 de). За четыре хода получить ее намного сложнее. Цель достигается очень хитрым и притом единственным маневром: **1. e4 e6 2. Cb5 Kpe7!! 3. C:d7 c6! 4. Ce8! Kp:e8.**

Интересно, что эта задача предлагалась для решения многим гроссмейстерам, но быстро справиться с ней сумел только Михаил Таль.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. И. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
М. Б. Дубах, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, М. П. Сидоров, Н. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор А. Л. Ипатова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 251-82-42

Сдано в набор 17.11.82 Подписано в печать 31.12.82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,74 Т-21000
Цена 40 коп. Заказ 2876 Тираж 170528 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ПЯТЬ ЗАДАЧ О ФЕРЗЯХ

1. *Сколькими способами можно расставить на доске восемь ферзей, чтобы они не угрожали друг другу, то есть никакие два из них не стояли на одной вертикали, горизонтали и диагонали?*

Это — одна из самых знаменитых математических задач на шахматной доске. Она называется задачей о восьми ферзях. В прошлом веке ею увлекался великий математик Карл Гаусс. Любопытно, что и задачу, и ее решение иногда ошибочно приписывают самому Гауссу. На самом деле, она была впервые поставлена в 1848 году немецким шахматистом М. Беццелем, а все расстановки (их 92) были найдены доктором Ф. Науком в 1850 году.

Одна из расстановок такова: a3, b7, c2, d8, e5, f1, g4, h6. Из нее можно получить еще семь при помощи поворотов доски на 90°, 180° и 270°, а также при симметриях относительно линий, разделяющих доску пополам. Аналогично и другие расстановки разбиваются на группы, в каждой из которых все расстановки получаются из одной поворотами и симметриями. Всего получается 12 групп — 11 из 8 расстановок и одна из 4 расстановок (в ней поворот на 180° приводит к той же позиции). Взяв по одной расстановке из каждой группы, мы получим «основной» набор из 12 расстановок все остальные получаются из них поворотами и симметриями.

2. *Расставить на доске наибольшее (n) число ферзей так, чтобы каждый из них нападал ровно на p ферзей.*

Задача о восьми ферзях допускает множество обобщений, мы привели одно из наиболее интересных. Условие $p=0$ означает, что ферзи не должны нападать друг на друга. Доказано, что при $p=1$ (под боем у каждого ферзя находится один ферзь) $n=10$ (a8, b3, b5, c7, d2, e7, f2, g4, g6, h1), а при $p=2$ имеем $n=14$ (a2, a3, a5, b1, c7, c8, d1, e8, f1, g1, h1, h4, h6, h8). Для больших значений p задача до конца еще не решена. Для $p=3$ найдена расстановка 16 ферзей (первая и последняя горизонтали), а для $p=4$ — 20 ферзей (вся граница доски кроме полей a1, a8, c8, d8, e8, f8, h8, h1).

3. *Может ли один белый ферзь на доске 4×3 перегнать черного короля из левого нижнего угла a1 в правый верхний d3? Ферзь стоит на поле c2.*

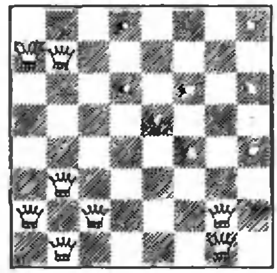
Цель достигается за десять ходов. **1. Фc3+ Кра2 2. Фc1 Крb3 3. Фa1 Крc2 4. Фa2+ Крc3** (4...Крc1 «проигрывает» быстрее: 5. Фb3 Крd2 6. Фb1 Крc3 7. Фa2 Крd3) **5. Фb1 Крd2 6. Фb2+ Крd1.** Возникла позиция, центрально симметричная исходной, с той, однако, разницей, что король теперь нужно загнать в ближайший угол доски. **7. Фa2!** (самое тонкое место решения) **7... ...Кр◦1 8. Фb3 Крd2 9. Фb1 Крc3 10. Фa2 Крd3.**

Для того, чтобы короля из исходной позиции загнать на угловое поле a3, следует сразу воспользоваться идеей приведенного решения: **1. Фd2! Крb1 2. Фc3 Кра2 3. Фc1 Крb3 4. Фd2 Кра3.**

Ферзь может загнать короля в любой угол доски $m\times n$, если только $m\neq n$. Удивительно, но на квадратных досках завлечь короля на угловые поля, ближайшие к исходному, не удается — король блуждает между двумя диагонально противоположными углами доски, и ферзь не в состоянии изменить его траекторию.

4. *Расставить на доске восемь ферзей так, чтобы наибольшее число ее полей находилось вне поля зрения ферзей.*

Искомое число полей равно 11, причем при помощи ЭВМ удалось установить, что существует семь основных решений (не получающихся друг из друга при поворотах и отражениях доски). Наиболее симметричное из них приведено на следующем рисунке (неатакованные поля отмечены точками).

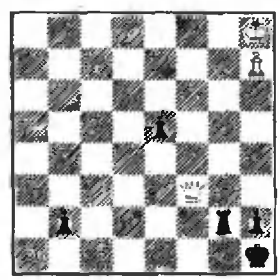


5. *Поставить на доске как можно больше ферзей с тем условием, чтобы при снятии любого из них появлялось ровно одно неатакованное поле.*

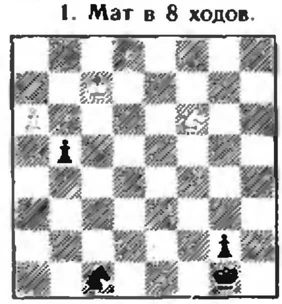
Эту задачу связывает с предыдущей... общий ответ! На доске можно расставить 11 ферзей, например: a1, a3, a4, c1, c2, d1, f1, g1, g2, g3, g4.

Конкурсные задания

В этом номере начинается наш новый шахматный конкурс, который пройдет в течение всего года. Победители его, как всегда, будут награждены шахматно-математической литературой с автографами ведущих шахматную страничку.



1. Мат в 8 ходов.



2. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 марта 1983 г. по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, редакция журнала «Квант» с пометкой на конверте «Шахматный конкурс, задания 1, 2».

kvant.mccme.ru

kvant.mccme.ru

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На этой фотографии показаны модели многогранников, изготовленные А. С. Близнюком и названные им «структурными образованиями гиперболоидов». Однополостный гиперболоид — поверхность, заданная уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$,— особенно хорошо поддается моделированию, так как у него имеется два семейства прямолинейных образующих (см. «Квант», 1979, № 1, с. 26). В части моделей рёбра как раз идут по этим образующим — поэтому прямолинейной многогранной конструкцией удается создать иллюзию искривленной поверхности.